



CORRIGE DE MATHEMATIQUE ENSP YAOUNDE 2000

Niveau 1



EXERCICE 1

Déterminons toutes les isométries du plan qui laissent invariant l'ensemble des points F de coordonnées $(n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$, dans un repère orthonormé (o, i, j) .

a) L'isométrie est un déplacement :
-l'application identique du plan

-les translations de vecteurs ni , $n \in \mathbb{Z}$

-Les rotations qui conservent F sont les identités et les symétries centrales de centre un point de F ou le milieu de deux points consécutifs de F ou bien les points $(n/2, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$.

b) L'isométrie est un antidéplacement
-les symétries d'axe ox

-les symétries d'axe une droite passant par $(n/2, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ et de direction j

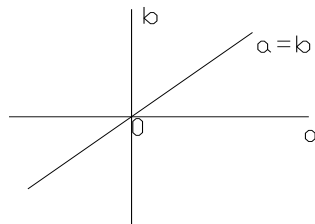
→

-les symétries - translations d'axe ox de vecteurs ni , $n \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 2

I-1-a) $\Phi(a, b) = \frac{\ln(b/a)}{a-b}$ est définie si et seulement si $a \neq b$, $a \neq 0$, et $b/a > 0$

$E_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / a \neq b, a \neq 0, ab > 0\}$, d'où E_1

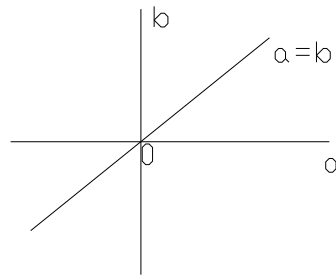


b) $\Psi(a, b) = \frac{\ln(b^2/a^2)}{a-b}$ est défini si et seulement si $a \neq b$, $a \neq 0$ et $b^2/a^2 > 0$.

$E_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / a \neq b, a \neq 0, b \neq 0\}$, d'où E_2

c) $\Phi(a, b) = \frac{\ln(b/a)}{a-b} \geq 0$ si et seulement si $a-b > 0$, $a \neq 0$ et $b/a \geq 1$ ou $a-b < 0$, $a \neq 0$, et $b/a \leq 1$.

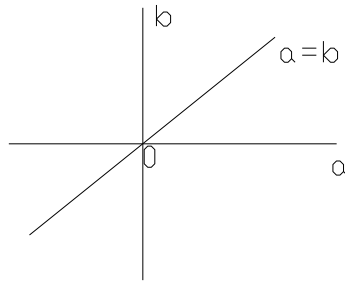
$E_1' = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / b < a < 0 \text{ ou } a < b < 0\}$, d'où E_1'



N.B. Ne pas écrire que $b/a \geq 1 \Rightarrow b \geq a$ mais plutôt $\frac{b-a}{a} \geq 0$. comme $a-b > 0$ on a $b-a < 0$ et par suite $a < 0$.

d) $\Psi(a,b) = \frac{\ln(b^2/a^2)}{a-b} \geq 0$ si et seulement si $a-b > 0$, $a \neq 0$ et $b^2/a^2 \geq 1$ ou $a-b < 0$, $a \neq 0$ et $b^2/a^2 \leq 1$

$E_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / a \neq 0, b \neq a, b \neq 0, b-a \geq 1\}$, d'où E_2



$$2) \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{\ln(x+1) - \ln(1)}{x-0} = f'(0) \text{ avec } f(x) = \ln(x+1)$$

$x \rightarrow 0, x \neq 0$ $x \rightarrow 0, x \neq 0$

comme $f'(0) = 1$ par suite $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ lorsque $x \rightarrow 0, x \neq 0$

$$\Phi(a, b) = \frac{\ln(b/a)}{a-b} = \frac{\ln\left(\frac{b-a}{a+1}\right)}{a-b} = -\frac{1}{a} \frac{\ln\left(\frac{b-a}{a+1}\right)}{\frac{b-a}{a}} \quad -1/a, a \neq 0 \text{ lorsque } b \neq a, b \neq a$$

$$\Phi(a, b) = -1/a \frac{\ln((b-c+c-a)+1)}{(b-c+c-a)/a} \quad -1/c, c \neq 0 \text{ lorsque } b \neq c, a \neq c, b \neq c, a \neq c$$

II Résolution de $ae^{ax} = be^{bx}$

Si $a=b$ alors tout réel est solution ($x \in \mathbb{R}$)

Si $(a, b) \in \mathbb{E}1$, alors $x = \Phi(a, b)$ est solution unique

Si $ab < 0$, pas de solution

Résolution de $a^2e^{ax} = b^2e^{bx}$

Si $a=b$ alors tout réel est solution

Si $a \neq b$, $a \neq 0$ et $b \neq 0$, $(a, b) \in \mathbb{E}2$ alors $x = (a, b)$ est solution unique

Si $a=0$, $b \neq 0$ ou $a \neq 0$, $b=0$, pas de solutions

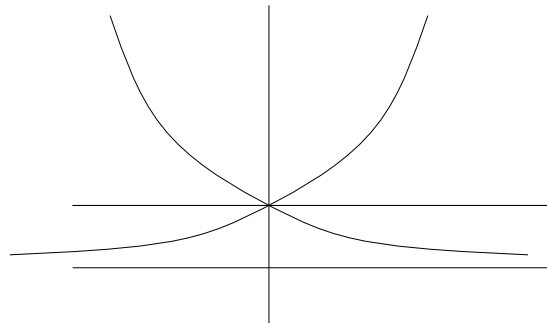
2) On a :

. $f_{(b, a)}(t) = e^{bt} - e^{at} = f_{(a, b)}(-t)$, donc $C_{(a, b)}$ et $C_{(b, a)}$ sont symétriques par rapport à (ox)

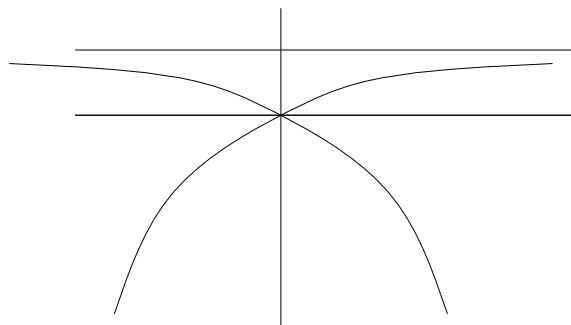
. $f_{(-b, -a)}(t) = e^{-bt} - e^{-at} = f_{(b, a)}(-t)$, donc $C_{(-b, -a)}$ et $C_{(b, a)}$ sont symétriques par rapport à (oy)

. $f_{(-b, -a)}(t) = e^{-bt} - e^{-at} = -(e^{-at} - e^{-bt}) = -f_{(a, b)}(-t)$, donc $C_{(-b, -a)}$ et $C_{(a, b)}$ sont symétriques par rapport à l'origine

3). $f_{(a, 0)}(t) = e^{at} - 1$; $f_{(0, 0)}(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$



. $f_{(0, b)}(t) = 1 - e^{bt}$ et d'après 2), C_b est le symétrique de C_a par rapport à (ox) . D'où :



4) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_{(a, b)}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{bt} (e^{(a-b)t} - 1) = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} f_{(a, b)}(t) = 0$ car $0 < b < a$

$$f_{(a,b)}(t) = ae^{at} - be^{bt} \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \frac{\ln(b/a)}{a-b} \text{ car } a-b > 0$$

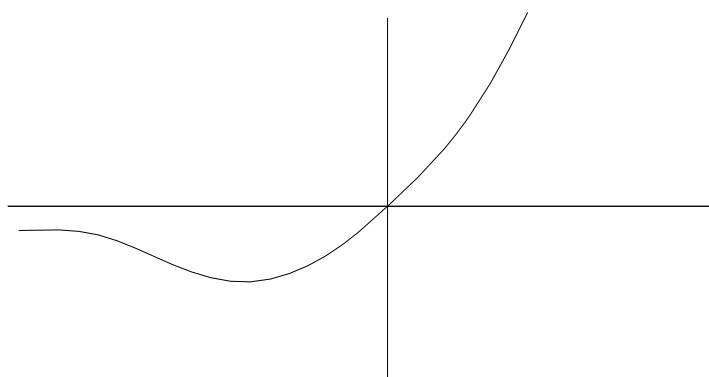
or $\Phi(a, b) = \frac{\ln(b/a)}{a-b}$ qui est définie négative pour $0 < a < b$ d'après I-1)

Tableau de variations

t	$-\infty$	$\Phi(a,b)$	0	$+\infty$
$f'(a,b)$	-	0	+	(a-b) +
$f(a,b)$	0 ↘	↗ 0		$+\infty$
	M			

Avec $m = f_{(a,b)}(\Phi(a, b)) = e^{(b/(a-b))\ln(b/a)} (b/a - 1) < 0$ car $0 < b < a$

$f_{(a,b)}(t) = a^2 e^{at} - b^2 e^{bt} = 0$ pour $t = \Psi(a, b)$ définie et négative pour $0 < b < a$



EXERCICE 3

I-1) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x + 11$, donc f est définie sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -x + (1 - e^{-x})(1 + e^x) = -x + (e^x - 1)(e^x + 1) = -f(x)$$

Donc f est impaire et le domaine d'étude est \mathbb{R}^+ .

De $f(x) - x = (1 - e^x)(1 + e^x)$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -1$, donc C admet la droite (D)

$$x \rightarrow +\infty$$

d'équation $y = x - 1$ pour asymptote oblique.

Par ailleurs, $f(x)-x+1 = \frac{-2}{1+e^x} > 0$, donc au dessus de l'asymptote (D)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

La symétrie de C par rapport à O implique l'existence d'une seconde asymptote (D') oblique d'équation $y = x+1$

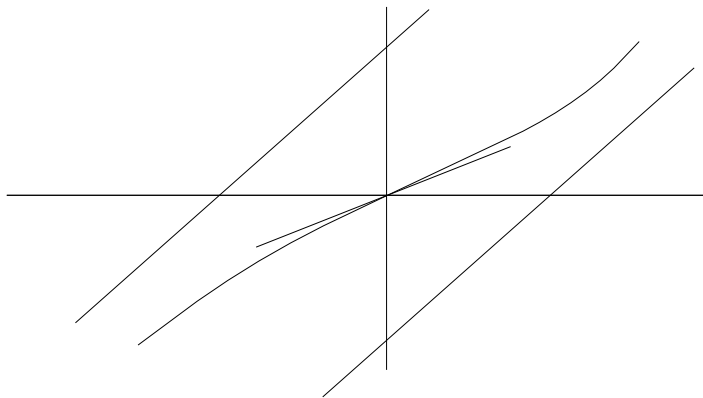
$f'(x) = (1+e^{2x}) / (1+e^x)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$

Tableau de variations de f :

X	0	$+\infty$
f'(x)	1/2	+
f(x)	0	$+\infty$

point d'inflexion : $f''(x) = 2e^x(e^x-1) / (1+e^x)^3 = 0 \Rightarrow x=0$ et $f(0) = 0$

Grphe.



2) $\forall x \in \mathbb{R}, 2 f'(x) - 1 = \{(1-e^x) / (1+e^x)\}^2 = (f(x) - x)^2$.

3) $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x} dx}{e^{-x}+1} = -\ln(e^{-x}+1) + K$

$A(\lambda) = \int (f(x) - (x-1)) dx = 2 \int \frac{dx}{1+e^x} = 2[-\ln(e^{-x}+1)]^\lambda$

$A(\lambda) = -2\ln(1+e^{-\lambda}) + 2\ln 2 \rightarrow 2\ln 2, \lambda \rightarrow +\infty$

II.1) Si $I(a, a)$, $IS_a(M)$ $(-x+a, -y+a)$ est égal à IM , donc S_a est la symétrie par rapport à I .

. $MT_a(M)$ (a, a) est égal à OI , donc T_a est la translation de vecteur OI .

2) L'abscisse de $S_a \circ S_b(M)$ $x+2(a-b)$,

donc $S_a \circ S_b = T_{2(a-b)}$

L'abscisse de $T_a \circ T_b(M)$ est $x+(a+b)$, donc $T_a \circ T_b = T_{a+b}$ L'abscisse de $S_a \circ T_b(M)$ est $-x+2(a-b/2)$, donc $S_a \circ T_b = S_{a-b/2}$

L'abscisse de $T_a \circ S_b(M)$ est $-x+2(b+a/2)$

donc $T_a \circ S_b = S_{b+a/2}$

. G est donc stable pour la composition des applications. Comme de plus $G \neq \phi$,

(Car l'identité est dans G et $S_a^{-1} = S_a$, $T_a^{-1} = T_a$) donc G est un sous groupe du groupe des bijections affines de P .

. Si a appartient à \mathbb{R}^* , $S_a \circ T_a = S_{a/2}$, mais $T_a \circ S_a = S_{3a/2}$. G n'est donc pas commutatif.

3) $(T_a \circ S_0) \circ T_a^{-1} = S_{a/2} \circ T_{-a} = S_a$, d'après les calculs du 2)

4) On sait d'après I-1) que $S_0(C) = C$.

Alors $S_a(C_a) = S_a \circ T_a(C) = T_a \circ S_0(C) = T_a(C) = C_a$, donc I est le centre de symétrie de C_a (la translation conserve le centre de symétrie).

5) $M(x, y) \in C_a \Leftrightarrow N(x-a, y-a) \Leftrightarrow y-a = f(x-a)$

$$\Leftrightarrow y = a + f(a) = f_a(x) = x + \frac{(1-e^{x-a})}{(1+e^{x-a})}$$