



ENONCE DE MATHEMATIQUE ENSP YAOUNDE 2006

Niveau 1



Durée 4h00mn

EXERCICE 1 (5 points)

Les pays membres de la Fédération Internationale de Football Association (FIFA) sont répartis en 6 zones géographiques (correspondant, chacune, à une confédération régionale de fédérations nationales de football) pour la phase finale de la coupe du monde FIFA 2006 actuellement en cours en Allemagne, voici quelle était la répartition par zone géographique FIFA des 32 équipes nationales qualifiées :

Afrique	Amérique du Sud	Asie	ConCaCaf	Europe	Océanie
5	4	4	4	14	1

En Allemagne, ces 32 nations étaient réparties en 8 groupes de 4 au 1^{er} tour. A l'issue de celui-ci, les 16 meilleures équipes se sont qualifiées pour les 8^{ème} de finale. On s'intéresse alors ici aux 2 événements :

- A : « la répartition géographique des 16 équipes qualifiées pour les 8^{ème} de finale est la suivante :

Afrique	Amérique du Sud	Asie	ConCaCaf	Europe	Océanie
1	3	0	1	10	1

»

- B: «Il y a un seul pays africain parmi les 16 équipes qualifiées pour les 8^{ème} de finale »

Il se trouve que les événements A et B se sont effectivement réalisés pendant la présente Coupe du Monde de football. Mais quelle était la probabilité de chacun de ces deux événements avant le début de la compétition en Allemagne ? **N.B. Considérer qu'à ce moment-là les 32 équipes avaient les mêmes chances de s'illustrer pendant la compétition.**

Les spécialistes du football (dont vous êtes peut-être) seraient certainement choqués par le «N.B.» ci-dessus. Compte tenu du passé de la compétition, une hypothèse peut-être un peu plus réaliste serait :

«Les équipes d'une même zone géographique FIFA ont les mêmes chances de devenir championne du monde de football. De plus, si P_0 est la probabilité de remporter le trophée de chacune des 5 équipes africaines, alors celle de chacune des équipes des 5 autres zones géographiques FIFA est la suivante :

Amérique du Sud	Asie	ConCaCaf	Europe	Océanie
$4P_0$	$\frac{3P_0}{5}$	$\frac{8P_0}{5}$	$5P_0$	$\frac{P_0}{5}$

»

Sous cette hypothèse, quelle était, avant le début de la compétition, la probabilité, pour chacune des 6 zones géographiques FIFA, de fournir le vainqueur final de l'épreuve ?

EXERCICE 2 (7 points)

Soient les 2 équations dans C : $2z^3 - z^2 + 5z + 3 = 0$, (E1)

$$2z^5 + z^4 + 6z^3 + 3z^2 - 2z - 1 = 0. \quad (E2)$$

1-) Montrer, par déductions successives, que toute solution commune des équations (E1) et (E2) vérifie :

$$2z^4 + z^3 - 2z - 1 = 0 ; \quad (E3)$$

$$2z^3 - 5z^2 - 5z - 1 = 0 ; \quad (E4)$$

$$2z^2 + 5z + 2 = 0. \quad (E5)$$

2-) Utiliser 1-) pour trouver les solutions communes des équations (E1) et (E2), s'il y en a.

3-) En déduire toutes les solutions, réelles ou complexes : a) de (E1) ; b) de (E2).

EXERCICE 3 (3 points)

Utiliser l'intégration par parties pour calculer l'intégrale $\int_{\sqrt{\pi/4}}^{\sqrt{\pi/2}} x^3 \sin x^2 dx$

EXERCICE 4 (20 points)

Soit la fonction f d'une variable réelle définie par : $f(x) = (x+1)e^{-\frac{4}{x}}$

Ci-après, on note Df, le domaine de définition de f dans IR, et Cf, la courbe représentative de f sur Df.

1-) Donner Df et calculer les limites de f aux bornes de Df.

2-) Etudier les variations de f sur Df, et dresser le tableau des variations.

3-) Cf admet-elle un (ou des) points d'inflexion ? Si oui, le(s) quel(s) ?

4-) a) Quelle est la limite de l'expression $\frac{e^u - 1}{u}$ quand $u \rightarrow 0$?

b) Et celle de $\frac{f(x)}{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$?

c) Utiliser ces résultats pour montrer que C_f admet une asymptote (à préciser) quand $x \rightarrow +\infty$.

d) C_f admet-elle d'autres asymptotes ?

5°) a) Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité à droite de 0.

NB : Dans la suite, ce prolongement par continuité à droite en 0 de f est admis.

b) Montrer que, ainsi prolongée, f devient dérivable à droite en 0. Quelle conséquence pour C_f ?

6°) Tracer C_f dans un repère orthonormé (unité sur les axes : 1cm).

NB : Prendre une page entière de votre cahier de composition pour ce graphisme.

EXERCICE 5 (15 Points)

On considère les 2 points $A(-3;4)$ et $B(1;-2)$ d'un plan euclidien \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

I- Déterminer chacun des sous-ensembles suivants de points de \mathcal{P} (NB : Pour chacun, donner l'équation cartésienne dans $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et dire de quelle figure géométrique il s'agit) :

- 1) $\mathcal{E}_1 = \{M \in \mathcal{P} \text{ tel que le triangle ABM est rectangle en A}\}$
- 2) $\mathcal{E}_2 = \{M \in \mathcal{P} \text{ tel que le triangle ABM est rectangle en B}\}$
- 3) $\mathcal{E}_3 = \{M \in \mathcal{P} \text{ tel que le triangle ABM est rectangle en M}\}$
- 4) $\mathcal{E}_4 = \{M \in \mathcal{P} \text{ tel que le triangle ABM est isocèle en M}\}$
- 5) $\mathcal{E}_5 = \{M \in \mathcal{P} \text{ tel que le triangle ABM est isocèle en A}\}$
- 6) $\mathcal{E}_6 = \{M \in \mathcal{P} \text{ tel que le triangle ABM est isocèle en B}\}$
- 7) $\mathcal{E}_7 = \{M \in \mathcal{P} \text{ tel que le triangle ABM est équilatéral}\}$
- 8) $\mathcal{E}_8 = \mathcal{E}_3 \cap \mathcal{E}_4$

II- sur un même graphisme, représenter tous ces sous-ensembles dans le plan \mathcal{P} muni du repère $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (unité sur les axes : 1cm)

NB : Prendre une page entière de votre cahier de composition pour ce graphisme.