



CORRIGE DE MATHEMATIQUE ENSP YAOUNDE 2003

Niveau 1



Exercice 1 :

1 a) Etude des variations de f

La fonction f est dérivable sur $D_f =]0, +\infty[$ et on a $\forall x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(x+1)x^2} ; f'(x) \text{ est donc strictement positif pour tout } x \in]0, +\infty[$$

Conclusion : f est croissante sur son domaine de définition $]0, +\infty[$ b) Dédution de l'inégalité : $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}^*$ On sait d'après 1.a que f est croissante sur $]0, +\infty[$ (1)Par ailleurs : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ (2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} = 0 \quad (3)$$

Ainsi (1), (2) et (3) $\Rightarrow \forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) \in]-\infty, 0[$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) \in]-\infty, 0[$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) \leq 0 \Rightarrow \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}^*$$

c) Démontrons que $\ln(n+1) - \ln(n) \geq \frac{1}{n+1} \forall n \in \mathbb{N}^*$ Posons $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}$, $\forall x \in]0, +\infty[$. G est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$g'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2} \leq 0, \text{ donc } g \text{ décroît sur }]0, +\infty[\quad (1)$$

De plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ (2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad (3)$$

Ainsi (1), (2) et (3) $\Rightarrow \forall x \in]0, +\infty[$, $g(x) \in [0, +\infty[$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, g(n) \geq 0 \Rightarrow \ln(n+1) - \ln(n) \geq \frac{1}{n+1} \forall n \in \mathbb{N}^*$$

2. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \ln(n+1)$

Ecrivons l'inégalité établie en 1b en faisant varier k de 1 à n

$$\ln(2) - \ln(1) \leq 1$$

$$\ln(3) - \ln(2) \leq \frac{1}{2}$$

$$\ln(n) - \ln(n-1) \leq \frac{1}{n-1}$$

$$\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

En faisant la somme de ces inégalités membre à membre il vient $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

$$\text{Donc } U_n \geq \ln(n+1)$$

$$\text{Or on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

Conclusion U_n diverge.

3 a) étudier le sens de variation de (V_n) .pour tout $n \geq 1$ $V_{n+1} - V_n = (U_{n+1} - \ln(n+1))$

$$(U_n - \ln(n)) = (U_{n+1} - U_n) - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \text{ or d'après la question 1.c}$$

$$\ln(n+1) - \ln(n) \geq \frac{1}{n+1} \text{ et donc } V_{n+1} - V_n \leq 0 \text{ la suite } (V_n) \text{ est décroissante}$$

b) en déduire que la suite (V_n) est convergente pour tout $n \geq 1$, $U_n \geq \ln(n+1)$ (question 2.a) donc $U_n \geq \ln(n)$, et ainsi $U_n \geq 0$ la suite (V_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge

4) pour tout entier $n \geq 2$, on définit la suite (W_n) par

$$W_n = \frac{U_n}{\ln(n)}$$

a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $1 \leq W_n \leq 1 + \frac{1}{n+1}$

pour tout entier $n \geq 2$, $\ln(n) \geq \ln(1) = 0$, or

$$U_n \geq \ln(n+1) \geq \ln(n) \text{ donc } W_n = \frac{U_n}{\ln(n)} \geq 1 \text{ .pour tout } n \geq 1$$

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \text{ (question 1.c) d'ou pour } k \geq 2,$$

$\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$ et en additionnant ces égalités pour

$2 \leq n \leq n$ et après simplification il vient : $Un - 1 \leq \ln(n)$ c'est à dire $Un \leq 1 + \ln(n)$ d'ou pour $n \geq 2$, $\frac{un}{\ln(n)} \leq 1 + 1/\ln(n)$ soit $Un \leq 1 + 1/\ln(n)$

b) Déterminer la limite de la suite (W_n) d'après la question précédente, pour tout $n \geq 2$, $1 \leq W_n \leq 1 + 1/\ln(n)$ or $\lim (1 + 1/\ln(n)) = 1$.donc d'après les limites par encadrement $\lim W_n = 1$

Exercice 2 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthogonal $(0 ; u ; v)$; unité graphique : 2cm. Soient A_0 le point d'affixe 2, A'_0 le point d'affixe $2i$ et A_1 le milieu du segment $[A_0A'_0]$.plus généralement si A_n est le point d'affixe z_n , on désigne par A'_n le point d'affixe $z'_n = iz_n$, et par A_{n+1} le milieu du segment $[A_nA'_n]$. On note ρ_n et θ_n le module et l'argument de z_n

1) déterminer les $A_0, A'_0, A_1, A'_1, A_2, A'_2, A_3$ placer ces points sur une figure. l'affixe de A_0 est 2, celle de A'_0 est $2i$, celle de A_1 est $0,5(2+2i)=1+i$ l'affixe de A'_1 est $i(1+i)$. l'affixe de A_2 est i l'affixe de A'_2 est -1 l'affixe de A_3 est $-0,5 + 0,5i$

2) calculer ρ_0, ρ_1, ρ_2 et ρ_3 ainsi que $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ et θ_3 on a $z_0 = 2$ donc $\rho_0 = 2$ et $\theta_0 = 0 \text{ mod } 2\pi$
on a $z_1 = 1+i$ donc $\rho_1 = \sqrt{2}$ et $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ on a $z_2 = i$ donc $\rho_2 = 1, \theta_2 = \frac{\pi}{2}$; on a $z_3 = -0,5 + 0,5i$ donc $\rho_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \theta_3 = \frac{3\pi}{4} \text{ mod } 2\pi$

3) pour tout entier n exprimer Z_{n+1} en fonction de Z_n . En déduire Z_n en fonction n . A_{n+1} est le milieu de $[A_nA'_n]$ et donc $Z_{n+1} = \frac{Z_n + iZ_n}{2}$. la suite (Z_n) est ainsi la suite géométrique de raison $\frac{1+i}{2}$ et de premier terme $Z_0 = 2$, donc $Z_n = 2 \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$

4) Etablir les expressions de ρ_n et θ_n et fonction de n

$$\rho_n = \left| 2 \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \right| = 2 \cdot \frac{1}{2^n} \cdot |(1+i)|^n = 2^{1-n}$$

$$\text{on déduit } Z_n = 2^{1-n} e^{i \frac{n\pi}{4}}$$

Exercice 3

1. G est le barycentre de $\{(A, 2); (B, 1); (C, -1)\}$ donc $2\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} - \overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

G_{-1} est le barycentre du système $\{(A, 2); (B, -1); (C, 1)\}$ $2\overrightarrow{G_{-1}A} - \overrightarrow{G_{-1}B} + \overrightarrow{G_{-1}C} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

2. On a $(k^2 + 1)\overrightarrow{G_kA} + k\overrightarrow{G_kB} - k\overrightarrow{G_kC} = \vec{0}$ soit $(k^2 + 1)\overrightarrow{G_kA} + k\overrightarrow{CB} = \vec{0}$
donc $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2 + 1}\overrightarrow{BC}$

3. f est dérivable sur $[-1; 1]$ en tant que fonction rationnelle et pour tout x appartenant à $[-1; 1]$ on a alors $f'(x) = \frac{(x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$ sur $[-1; 1]$ on a f' qui est négative donc f est décroissante sur cet intervalle. Aux limites on a $f(-1) = 1/2$ et $f(1) = -1/2$

4. l'image de f parcourt l'intervalle $[-1/2; 1/2]$ lorsque k parcourt $[-1; 1]$ donc l'ensemble des points G_k est l'intervalle $[G_1; G_{-1}]$

5. on a $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$ donc $\|2\overrightarrow{MG_1}\| = \|2\overrightarrow{MG_{-1}}\|$ Ainsi E est le plan médiateur de $[G_1; G_{-1}]$

6. On a $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AI}$ ou I est le milieu de $[B, C]$. Donc il s'agit de la sphère de centre G_1 et de rayon AI.

7.

(a) $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{AG_1} = (x_{G_1}; y_{G_1}; z_{G_1} - 2)$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{GB} = (0; 0; -2)$ donc $G_1 = O$. Par ailleurs de $\overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = (0; 0; 2)$ on déduit que G_{-1} a pour coordonnées $(0; 0; 4)$. F est la sphère de centre O et de rayon $IA = \sqrt{6}$ et E est le plan médiateur de $[G_1, G_{-1}]$, dont il contient le point A qui est le milieu de $[G_1, G_{-1}]$ et est orthogonal à la droite (OA). Or $OA < AI$, on en déduit que le plan E coupe la sphère F.

(b) Soit M un point de ce cercle, le triangle OAM est rectangle en A donc $OM^2 = OA^2 + AM^2$ soit $(\sqrt{6})^2 = 2^2 + AM^2$, on en déduit que $AM = \sqrt{2}$ le rayon du cercle C est donc $\sqrt{2}$. Une solution analytique est aussi possible : La sphère E a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = 6$. Le plan F a pour équation $z = 2$, le cercle C a donc pour équations $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ et $z = 2$ soit encore $x^2 + y^2 = 2$ (et $z = 2$) le rayon du cercle C est donc $\sqrt{2}$.

Exercice 4 :

On pose $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) dx$ et, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) dx$

$$1. I_0 = \left[-\frac{1}{3} \cos(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \cos(0) = \frac{1}{3}$$

2. On pose $u(x) = x$ et $v(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x)$. u et v sont dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ et leurs dérivées $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \sin(3x)$ sont continues sur cet intervalle ; en intégrant par parties il vient :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin(3x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3} x \cos(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(-\frac{1}{3} \cos(3x)\right) dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} \sin(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

3. On pose $u(x) = x^{n+2}$ et $v(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x)$. u et v sont dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ et leurs dérivées $u'(x) = (n+2) x^{n+1}$ et $v'(x) = \sin(3x)$ sont continues sur cet intervalle ; en intégrant par parties

$$\begin{aligned} \text{il vient } I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{n+2} \sin(3x) dx = \left[x^{n+2} \left(-\frac{1}{3} \cos(3x)\right) \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(-\frac{1}{3} \cos(3x)\right) (n+2) x^{n+1} dx \\ &= \frac{1}{3} (n+2) \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{n+1} \cos(3x) dx \end{aligned}$$

On pose maintenant $u(x) = x^{n+1}$ et $v(x) = \frac{1}{3} \sin(3x)$. u et v sont dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ et leurs dérivées $u'(x) = (n+1) x^n$ et $v'(x) = \cos(3x)$ sont continues sur cet intervalle ; en intégrant par parties il vient

$$I_{n+2} = \frac{1}{3}(n+2) \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{n+1} \cos(3x) dx$$

$$I_{n+2} = \frac{1}{3}(n+2) \left(\left[x^{n+1} \left(\frac{1}{3} \sin(3x) \right) \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{3} \sin(3x) \right) (n+1) x^n dx \right)$$

$$= \frac{1}{3}(n+2) \left(\left(\frac{\pi}{6} \right)^{n+1} - \frac{1}{3}(n+1) I_n \right)$$

Soit donc que $I_{n+2} = \frac{1}{9}(n+2) \left(\frac{\pi}{6} \right)^{n+1} - \frac{1}{9}(n+1)(n+2) I_n$

4. La relation précédente nous donne avec $n=1$ $I_3 = \frac{\pi^2}{108} - \frac{2}{27}$

5. a Pour tout $n \geq 1$ $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{n+1} \sin(3x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin(3x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n (x-1) \sin(3x) dx$

Or sur $[0, \pi/2]$ $\sin 3x \geq 0$ et sur $[0, \pi/6]$ $x^n \geq 0$ et $x-1 \leq 0$ donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et la suite (I_n) est décroissante.

b) pour tout $x \in [0, \pi/6]$ $0 \leq \sin(3x) \leq 1$. Comme $x^n \geq 0$; $0 \leq x^n \sin(3x) \leq x^n$. Les fonctions

$x^n \sin(3x)$ et x^n sont continues sur $[0, \pi/6]$. Ainsi $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin(3x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n dx$ soit

$$0 \leq I_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n dx$$

c) On calcule $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{n+1}$ on en déduit d'après

la question précédente que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{n+1}$ comme $0 < \pi/6 < 1$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{n+1} = 0 \text{ on a donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

EXERCICE 5

Partie A

1- Déterminer les nombres réels x tels que la fonction h , définie par $h(x) = e^{\alpha x}$ sont solutions de (E).

La fonction h est dérivable deux fois sur \mathbb{R} et $h'(x) = r e^{\alpha x}$ et $h''(x) = r^2 e^{\alpha x}$

Ainsi $h''(x) - h(x) = (r^2 - 1) e^{\alpha x}$ et h est solution de l'équation (E) si et seulement si $r^2=1$, C'est à dire si, et seulement si

$$r = 1 \text{ ou } r = -1$$

2- Vérifier que les fonctions $\varphi(x) = \alpha e^{\alpha x} + \beta e^{-\alpha x}$, où α et β sont deux nombres réels, sont des solutions de (E).

On admet qu'on obtient ainsi toutes les solutions de (E). φ est deux fois dérivable et

$$\varphi'(x) = \alpha e^{\alpha x} - \beta e^{-\alpha x} \text{ et } \varphi''(x) = \alpha e^{\alpha x} + \beta e^{-\alpha x} = \varphi(x) \text{ donc } \varphi \text{ est solution de (E)}$$

3- Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $(\ln 2 ; 3/4)$ et admet en ce point une tangente dont le coefficient directeur est $5/4$. Il faut ainsi chercher α et β tels que $\varphi(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$ Vérifie $\varphi(\ln 2) = 3/4$ et $\varphi'(\ln 2) = 5/4$ c'est à dire : $2\alpha + (1/2)\beta = 3/4$ et $2\alpha - (1/2)\beta = 5/4$

Ce qui donne

$$\alpha = 1/2 \text{ et } \beta = -1/2$$

$$\varphi(x) = (e^x - e^{-x})/2$$

La solution recherchée est donc

Partie B

On appelle f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, i, j)

1- Soit μ un nombre réel. Montrer que, pour tout nombre réel x , $f(x) = \mu$ est

équivalent à $e^{2x} - 2\mu e^x - 1 = 0$. En déduire que l'équation $f(x) = \mu$ a une solution unique dans \mathbb{R} et déterminer sa valeur en fonction de μ .

$$F(x) = \mu \text{ est équivalent à } e^x - e^{-x} = 2\mu \text{ Soit encore } e^{2x} - 2\mu e^x - 1 = 0$$

$$\text{Posons } e^x = X$$

$$\text{L'équation précédente s'écrit alors } X^2 - 2\mu X - 1 = 0$$

C'est une équation du second degré de discriminant égal à $4(\mu^2 + 1) > 0$ Qui par conséquent admet deux racines réelles

$$X_1 = \mu + (\mu^2 + 1)^{1/2} > 0 \quad \text{et} \quad X_2 = \mu - (\mu^2 + 1)^{1/2} < 0 \quad \text{d'où } f(x) = \mu \text{ si et seulement si}$$

$$X = \ln(\mu + (\mu^2 + 1)^{1/2})$$

2- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

Elles valent respectivement $+\infty$ et $-\infty$.

3- Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x et en déduire le sens de variation de f Sur \mathbb{R} .

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = (e^x + e^{-x})/2 > 0$ donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

4- Déterminer une tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

La tangente à (C) au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)x + f(0)$

$$\text{Soit } y = x$$

5- En étudiant le sens de variation de la fonction d définie sur \mathbb{R} par $d(x) = f(x) - x$, Préciser la position de (C) par rapport de (T).

La position de la courbe par rapport à sa tangente est donnée par la ligne de $d(x)$. Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} et

$$d'(x) = (e^x + e^{-x})/2 - 1 = (e^x + e^{-x} - 2)/2 = (e^{2x} - 2e^x + 1) e^{-x}/2 = (e^x - 1)^2 e^{-x}/2 > 0 \quad (d'(0) = 0)$$

donc d est strictement croissante sur \mathbb{R} . Comme $d(0) = 0$, on en déduit que la courbe est en dessous de la tangente pour $x < 0$ et au dessus de celle ci pour $x > 0$

7. Calcul de l'aire

$$A(D) = 4 \int_0^1 [f(x) - x] dx$$

$$= \int_0^1 d(x) dx \quad (\text{car sur }]0, +\infty[, f(x) > x)$$

$$\text{or } \int_0^1 (f(x) - x) dx = \frac{1}{2} [e^x + e^{-x} - x^2]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \left(e + \frac{1}{e} - 3 \right)$$

$$A(D) = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} - 3 \right) ua$$

l'unité d'aire étant ici égale à 4 cm^2 , on trouve donc

$$A(D) = 4 * \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} - 3 \right) \text{cm}^2$$

$$\Rightarrow A(D) = 2 \left(e - \frac{1}{e} - 3 \right) \text{cm}^2$$

PARTIE C

$$\Phi(x) = \int_0^x (x-t)\Phi(t)dt \quad (\text{H})$$

1) On suppose qu'il existe une telle fonction Φ

a) justifions que $\Phi(x) = x + x \int_0^x \Phi(t)dt - \int_0^x t\Phi(t)dt; \forall x \in R$

On a $\Phi(x) = x + \int_0^x (x-t)\Phi(t)dt$

$$= x + \int_0^x (x\Phi(t)dt - t\Phi(t)dt)$$

$$= x + x \int_0^x \Phi(t)dt - \int_0^x t\Phi(t)dt \quad (\text{car la variable est } t \text{ et } x \text{ est considéré}$$

comme une constante)

d'où $\Phi(x) = x + x \int_0^x \Phi(t)dt - \int_0^x t\Phi(t)dt$

$$* \Phi(0) = 0 + 0 \int_0^0 \Phi(t)dt - \int_0^0 t\Phi(t)dt$$

$$\Rightarrow \Phi(0) = 0$$

b) Démontrer que, $\forall x \in R, \Phi'(x) = 1 + \int_0^x \Phi(t)dt$

On a $\Phi(x) = x + x \int_0^x \Phi(t)dt - \int_0^x t\Phi(t)dt \quad (1)$

$$\Rightarrow \Phi'(x) = 1 + (x \int_0^x \Phi(t) dt)' - (\int_0^x t \Phi(t) dt)'$$

Calculons d'abord l'expression $\int_0^x t \Phi(t) dt$.

Procédons par intégration par parties et posons $u'(t) = \Phi(t)$ et $v(t) = t$

On a $v'(t) = 1$ et posons $u(t) = \Psi(t)$, u' et v' sont continues du fait que $\Phi(t)$ est dérivable par hypothèse.

On a alors /

$$\int_0^x t \Phi(t) dt = [t \Psi(t)]_0^x - \int_0^x \Psi(t) dt$$

en remplaçant cette expression dans (1), on obtient

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= x + x \int_0^x \Phi(t) dt - \int_0^x t \Phi(t) dt \\ &= x + x \int_0^x \Phi(t) dt - [t \Psi(t)]_0^x + \int_0^x \Psi(t) dt \end{aligned}$$

posons $\Gamma(t) = \int \Psi(t) dt$ une primitive de $\Psi(t)$

On a donc

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= x + x(\Psi(x) - \Psi(0)) - x\Psi(x) + \Gamma(x) - \Gamma(0) \\ &= x - x\Psi(0) + \Gamma(x) - \Gamma(0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi'(x) = 1 - \Psi(0) + (\Gamma(x))' - (\Gamma(0))'$$

or $(\Gamma(x))' = \Psi(x)$ et $(\Gamma(0))' = 0$, donc

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= 1 - \Psi(0) + \Psi(x) \\ &= 1 + (\Psi(x) - \Psi(0)) \\ &= 1 + \int_0^x \Phi(t) dt \end{aligned}$$

d'où $\Phi'(x) = 1 + \int_0^x \Phi(t) dt$

* Calculons $\Phi'(0)$

on a $\Phi'(0) = 1 + \int_0^0 \Phi(t) dt \Rightarrow \Phi'(0) = 1$

c) Vérifions que Φ est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A

l'équation (E) est $y'' - y = 0$.

Montrons que l'on a $\Phi'' - \Phi = 0$

$$\Phi'(x) = 1 + \int_0^x \Phi(t) dt$$

$$= 1 + \Psi(x) - \Psi(0)$$

$$\Rightarrow \Phi''(x) = 0 + (\Psi(x))' - 0 \quad \text{or } (\Psi(x))' = \Phi(x)$$

$$\Rightarrow \Phi''(x) = \Phi(x)$$

$$\Rightarrow \Phi'' = \Phi$$

donc $\Phi'' - \Phi = 0$ d'où Φ est une solution de (E)

* Déterminons à quelle solution Φ correspond

On sait que toutes les solutions d(E) sont sous la forme $\alpha e^x + \beta e^{-x}$

Or d'après les questions précédentes on a

$$\begin{cases} \Phi(0) = 0 \\ \Phi'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\beta = \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } \Phi(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$2) \text{ Calculons } \int_0^x t(e^t - e^{-t}) dt$$

$$\text{Posons } A = \int_0^x t(e^t - e^{-t}) dt \quad u = t, v' = e^t - e^{-t}.$$

$$\text{On a } u' = 1 \quad \text{et } v = e^t + e^{-t}$$

$$\text{Donc } A = \left[t(e^t + e^{-t}) \right]_0^x - \int_0^x (e^t - e^{-t}) dt$$

$$= \left[t(e^t + e^{-t}) \right]_0^x - \left[(e^t + e^{-t}) \right]_0^x$$

$$= x(e^x + e^{-x}) - (e^x + e^{-x}) + (e^0 + e^{-0})$$

$$\Rightarrow A = x(e^x + e^{-x}) - (e^x + e^{-x})$$

3) Démontrer que la fonction $\Phi = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ vérifie (H)

$$\text{Calculons } \Phi(x) - \int_0^x (x-t)\Phi(t)dt$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \Phi(x) - \int_0^x (x-t)\Phi(t)dt &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - \int_0^x \frac{1}{2}(x-t)(e^t - e^{-t})dt - \\ &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - \frac{1}{2} \int_0^x x(e^t - e^{-t})dt + \frac{1}{2} \int_0^x t(e^t - e^{-t})dt \\ &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - \frac{x}{2} [e^t - e^{-t}]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x t(e^t - e^{-t})dt \end{aligned}$$

or $\int_0^x t(e^t - e^{-t})dt = x(e^x + e^{-x}) - (e^x + e^{-x})$ d'après la question précédente

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Phi(x) - \int_0^x (x-t)\Phi(t)dt &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - \frac{x}{2}(e^x + e^{-x}) + x + \frac{x}{2}(e^x + e^{-x}) - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x} - xe^x - xe^{-x} + 2x + xe^{-x} + xe^x - e^x + e^{-x}) \\ &= x \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \Phi(x) - \int_0^x (x-t)\Phi(t)dt = x$$