ENONCE DE MATHEMATIQUE ENSP YAOUNDE 2005

Niveau 1

ETUDE LIBRE
www.etudelibre.com

<u>SUJET N°1</u> : Durée 3 heures

On désigne par IN l'ensemble des entiers naturels et par IR l'ensemble des réels.

On note IN* l'ensemble IN privé de 0.On note IR* l'ensemble IR privé de 0.

On appelle IR+ l'ensemble des réels positifs et par IR- l'ensemble de réels négatifs.

On désigne par Z l'ensemble des entiers relatifs.

<u>EXERCICE 1</u> : SUITE ET FONCTION

On donne la fonction P_3 de a variable réelle définie sur IR par $P_3(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1$

Représenter dans une même fenêtre $\left[-1;1\right]\times\left[0;2\right]$ d'unités 6 cm les courbes représentatives de P_3, $P_3^{'}$ et de $P_3^{''}$.

On considère une fonction de la variable réelle f définie sur IR telle que $f'=f$.

a) Montrer qu'il n'y a pas de fonction polynôme non nulle satisfaisant cette condition.

On définit la suite de fonctions à variable réelle (f_n) par :

$f_0(x)=1$ et pour tout n de IN : $f_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+f_n(x)$.

n ! (factorielle n) est égal à $n\times(n-1)\times(n-2)\ldots\times3\times2\times1$ et par convention 0 !=1

Par exemple $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$.

b) Montrer que $P_3=f_3$

c) Montrer pour tout n de IN que $f_n(x)=\sum_0^n\frac{x^i}{i!}$.

d) Exprimer $f_{10}(2)-f_{10}^{'}(2)$ sous forme d'une fraction irréductible de puissances de facteurs premiers.

<u>EXERCICE 2</u> : PLAN COMPLEXE

P étant le plan complexe muni d'un repère orthonormé d'origine O, on désigne par A le point d'affixe z, B la point d'affixe z^2 et C la point d'affixe z^3.

1) Déterminer les valeurs éventuelles de z telles que A, B et C ne soient pas distincts deux à deux.

2) Déterminer la partie E des points A de P telle que A, B et C soient alignés.

3) Montrer que A, B et C ne peuvent pas appartenir à un même cercle centré en O, autre que les cercles de rayon 0 ou 1.

4) Si A, B et C sont deux à deux distincts, on veut que le triangle ABC soit rectangle en C. Montrer alors que A doit appartenir au cercle Γ de centre Ω (-1/2) et de rayon ½ privé de points à préciser.

5) On veut que l'affixe de C soit un réel strictement positif.

Montrer alors que A doit appartenir à une partie G de P à déterminer.

6) Déterminer le lieu I du point A pour lequel la triangle ABC est isocèle.

7) Donner la forme exponentielle de l'affixe des points éventuels A tels que ABC soit équilatéral.

<u>EXERCICE 3</u> : MAJORATIONS

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des réels IR par $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

1) Montrer que pour tous x et y de IR : $|f(x)-f(y)|\leq|x-y|$.

Soit g une application continue de IR dans IR telle qu'il existe un M positif vérifiant pour tout x de IR : $|g(x)|\leq M$ .On appelle G la primitive de g qui s'annule en 0.

2) Montrer que pour tous x et y de IR : $|G(x)-G(y)|\leq M|x-y|$.

Soit P l'ensemble des fonctions continues k vérifiant la proposition suivante :

$\exists\lambda_k$ de IR_+ Tels que pour tous x et y de IR : $|k(x)-k(y)|\leq\lambda_k|x-y|$.

3) Montrer que la somme de deux éléments de P est dans P.

4) Montrer que la composée de deux éléments de P est dans P.

Soit l'application φ définie sur IR par $\varphi(x)=\pi+\frac{1}{3}\sin(x)$ et la suite réelle (u_n) définie par u_0 et sur IN* par $u_n=\varphi(u_{n-1})$.

5) Montrer que pour tous x et y réels, $|\varphi(x)-\varphi(y)|\leq\frac{1}{3}|x-y|$ en déduire que pour tout n de IN :

$|u_n-\pi|\leq\frac{1}{3^n}|u_0-\pi|$

6) Soit la fonction θ définie sur IR par $\theta(x)=e^{-x^2}$ et Φ sa primitive qui s'annule en 0

Montrer que Φ est un élément de P.

7) Montrer que si $x \geq 1$ alors $\int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_1^x e^{-t} dt$ .En déduire que Φ est convergente en $+\infty$ (on ne calculera pas sa limite).

EXERCICE 4 : ETUDE DE FONCTION

1) Montrer que la fonction $x \mapsto \tan x$ admet une application réciproque notée $x \mapsto arc\tan x$ bijective sur IR

2) Justifier que arctan est dérivable sur IR et calculer arctan'(x).

3) Déterminer un prolongement par continuité en 0 de φ définie par $\varphi(x) = \dfrac{\arctan x}{x}$

4) Calculer arctan'' (0) et arctan''' (0) ; arctan'' et arctan''' désignent respectivement les dérivées seconde et troisième de arctan.

5) Pour x>0, montrer que : $0 \leq x - \arctan x \leq \dfrac{x^3}{3}$.

On pose, pour x>0 : $1 - f(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x \dfrac{t - \arctan(t)}{t} dt$

6) montrer que $0 \leq 1 - f(x) \leq \dfrac{x^2}{9}$.

7) Déterminer un prolongement par continuité à droite de 0 de la fonction f.

Quelle est la pente de la demi tangente à la courbe représentative de f en ce point ?

8) Montrer que si $x \geq 1$ alors $\int_0^x \dfrac{\arctan t}{t} dt \leq \dfrac{\pi}{2} \ln x$ .ln est la fonction logarithme népérien.

9) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

10) On pose g(x) = x2f '(x) pour tout x >0. Montrer que $g(x) = -\int_0^x \dfrac{\arctan t}{t} dt + \arctan x$

11) On pose h(x)=xg'(x). Calculer h'(x).

12) Etudier les variations de h et de g sur $]0;+\infty[$ .En déduire les variations de f sur IR+.Tracer l'allure de f dans un repère orthonormé.

EXERCICE 5 : PARTAGE EQUITABLE

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé K d'unité 10 cm on donne les trois cercles : C_1 de centre $\Omega_1(-2;10)$ et de rayon 1cm ,

C_2 de centre $\Omega_2(4;10)$ et de rayon 2cm

C_3 de centre $\Omega_3(0;10)$ et de rayon 8cm .

On appellera Δ l'axe des abscisses.

1) Déterminer la lieu Γ_1 des points équidistants de C_1 et Δ .

En déterminer une équation et représenter ce lieu dans le plan P.

2) Déterminer le lieu Γ_2 des points équidistants de C_1 et C_2 .

En déterminer une équation et représenter ce lieu dans le plan P.

3) Déterminer le lieu Γ_3 des points équidistants de C_3 et C_2 .

En déterminer une équation et représenter ce lieu dans le plan P.

SUJET 2 : Durée 2heures

EXERCICE 1 : PROBABILITE

Une urne contient 20 boules équitablement réparties entre les couleurs rouges, vertes, bleues et jaunes. On prend simultanément au hasard deux boules de l'urne, calculer de deux façons la probabilité p d'avoir 2 boules de couleurs différentes.

EXERCICE 2 : NOMBRES COMPLEXES

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé déterminer la distance entre les points images des deux solutions non réelles de l'équation $z^3 + z^2 + 2z - 4 = 0$.

EXERCICE 3 : CONIQUE

Déterminer la centre et les foyers de la conique dont une partie est la représentation graphique de la fonction f définie sur IR par $f(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$

EXERCICE 4 : DERIVEE

Etudier les variations sur l'ensemble des réels IR de la fonction f telle que $f(x) = x\sqrt{x^2 + x + 1}$

EXERCICE 5 : LIGNE DE NIVEAU

ABCD est un carré de coté 4, de centre O, origine du repère orthonormé du plan

Déterminer l'ensemble Ω des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MD}\right)\left(3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)=0$

EXERCICE 6 : DANS UN TRIANGLE

ABC est un triangle quelconque. a=BC ; b=AC ;c=AB.

A' est le milieu de $[BC]$; B'est le milieu de $[AC]$; C'est le milieu de $[AB]$.

G est l'iso barycentre de A, B et C.

Exprimer $a=\frac{1}{2}+i\ X=2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MB}'+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$ en fonction de MG2 et des longueurs a, b et c.

EXERCICE 7 : PROBABILITE

Un pêcheur dispose de cannes à pêche de marque A, B ou C.

En une heure, avec l'expérience, il constate que la canne A a une chance sur 2 de fournir au moins une prise ; la canne B, 1 chance sur 3 et la canne C une chance sur 4.

On note : $P(A)=\frac{1}{2}$ $\quad P(B)=\frac{1}{3}$ $\quad P(C)=\frac{1}{4}$

Pour une de pêche on désigne par :

P (2A) : la probabilité d'avoir au moins une prise avec 2 cannes de type A

P (2B) : la probabilité d'avoir au moins une prise avec 3 cannes de type B

P (4C) : la probabilité d'avoir au moins une prise avec 4 cannes de type C

Déterminer, en justifiant, laquelle de ces trois probabilités est la plus grande.

EXERCICE 8 : LIMITE

Rédiger la calcul de la limite en -∞ de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^2+x}+x$

EXERCICE 9 : ESPACE

ABCDEFGH est un cube d'arête 4cm.

I est le milieu de $[HG]$.

Calculer en cm^2 l'aire du triangle HIB.

Calculer le volume en cm^3 de la pyramide de base HIB et de sommet F.

EXERCICE 10 : TRAVAIL DE LA FOURMI

Une fourmi se déplace sur les arêtes d'un octaèdre régulier.

A chaque sommet, les 4 chemins possibles sont équiprobables.

A chaque déplacement la fourmi parcourt une arête.

Calculer la probabilité P que la fourmi atteigne le sommet diamétralement opposé à celui de son départ en exactement 3 déplacements.

EXERCICE 11 : TRANSFORMATIONS

ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.I est le milieu de $\left[BC\right]$.

Déterminer les caractéristiques de la transformation $r\left(C;\frac{\pi}{2}\right)ot_{\overrightarrow{BC}}or\left(B;\frac{\pi}{2}\right)$

(Où r désigne une rotation, t une translation et o est la composition des applications).

EXERCICE 12 : PROBABILITES

Dans une classe de 40 étudiants, la probabilité d'absence en jour donné de chaque étudiant est de 0,02.Les absences sont indépendantes les unes des autres.

Exprimer la probabilité P qu'un jour il y ait 2 élèves absents.

EXERCICE 13 : NOMBRES COMPLEXES

Dans la plan complexe rapporté à un repère orthonormé d'origine O, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=\frac{1}{2}+i$ $\quad b=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})+\frac{3}{2}i$ $\quad c=(\frac{1}{2}+\sqrt{3})+2i$

Calculer la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

EXERCICE 14 : ARITHMETIQUE

Calculer le nombre de diviseurs de 10800.

EXERCICE 15 : SUITES NUMERIQUES

On considère les suites numériques $U_{AB} = V_A - V_B$ (u_n) et (v_n) définies pour tout entier n par :

$u_0 = -\frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$ et $v_n = 2u_n + 6$.

Montrer que la suite (v_n) est géométrique .En déduire $\sum_{k=0}^{k=n-1} u_k$

EXERCICE 16 : BARYCENTRE

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O, I, J, K).A et B sont deux points distincts.

Déterminer l'ensemble (E) de points M de l'espace tels que $\frac{MA}{MB} = 3$.

EXERCICE 17 : ESPACE

ABCDEFGH est un cube d'arête a. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HB}$

EXERCICE 18 : INEQUATION

Résoudre dans l'ensemble des réels IR l'inéquation $e^{2t} - e^{3+t} - e^{t-1} + e^2 \geq 0$.

EXERCICE 19 : LIMITES

Calculer la limite en 1 de la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln(x^2 - 3x + 3)}{x - 1}$

EXERCICE 20 : CALCUL INTEGRAL

Calcule $\int_2^3 \frac{t}{(t^2 - 1)^2}$