



CORRIGE DE MATHEMATIQUE ENSP YAOUNDE 2002

Niveau 1



Exercice 1

1-a) La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ [car combinaison linéaire de fonctions

dérivables sur $]0, +\infty[$. Et $g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x}$

Posons pour tout $x \in]0, +\infty[$, $k(x) = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$. Ainsi pour tout $x \in]0, +\infty[$.

$$g(x) = \frac{k(x)}{x} = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}.$$

b) Le trinôme $3x^2 + 3x + 2$ admet pour discriminant $\Delta = -15 < 0$, il est donc strictement positif sur \mathbb{R} . Comme $\frac{1}{x} > 0$, pour $x \in]0, +\infty[$, il s'en suit que $g'(x)$ est du signe de $(x-$

1). La fonction g est donc strictement décroissante sur $]0, 1[$ [et strictement croissante sur $]1, +\infty[$. Le minimum de g est donc atteint en 1 et vaut $g(1) = 1$. Par suite $g(x)$ est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

2. Pour tout $x > 0$ $f(x) = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{\ln x}{x} \right)$


$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ en } 0^+ \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \text{ en } 0^+ ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ en } +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ en } +\infty$$

3. Pour tout $x > 0$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{x - 2x \ln x}{x^4}$

$$f(x) = \frac{x^3 - x - 2 \ln x + 1}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}.$$

$f(x)$ est du signe de $g(x)$, c'est-à-dire strictement positive sur $]0, +\infty[$.

X	0	$+\infty$
f		+
F	$-\infty$	$+\infty$ 

EXERCICE 2:

1-a) Par intégration par partie, on a :

$$I_1 = [(1-x)(-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - [-e^{-x}]_0^1 = \frac{1}{e}$$

b) Pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout entier naturel non nul on a :

$$0 \leq (1-x)^n \leq 1 \quad \text{car } 0 \leq 1-x \leq 1 \quad \text{et } 0 \leq (1-x)^n e^{-x} \leq e^{-x} \quad \text{car } e^{-x} > 0$$

Il vient $0 \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx$ par monotonie de l'intégrale.

Il s'ensuit que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{e} + 1\right)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

c) En intégrant par parties on a

$$\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-x} dx = [(1-x)^{n+1} (-e^{-x})]_0^1 - (n+1) \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx$$

$$= 1 - (n+1)! I_n \quad \text{donc} \quad I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$$

2-a) Par récurrence on a :

$$I_1 = \frac{1}{e} \quad \text{et} \quad \frac{1}{e} + (-1)I_1 = 0 = a_1 \quad \text{pour } n=1$$

Supposons $a_k = \frac{1}{e} + (-1)^k I_k$ pour un certain entier k

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{e} + (-1)^k I_k + \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{e} + (-1)^k \left(\frac{1}{(k+1)!} - I_{k+1} \right) + \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \frac{1}{e} - (-1)^k I_{k+1} = \frac{1}{e} + (-1)^{k+1} I_{k+1} \end{aligned}$$

b) Nous avons $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ D'après 1-b donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{e}$

EXERCICE 3

1- On a : $\cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) = \cos^2 x (1 - \sin^2 x) = \cos^4 x$ par suite

$$I = \int_0^\pi \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) dx$$

2- Par intégration par parties on a

$$I = \left[\cos x \left(\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x \right) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(-\sin^2 x + \frac{1}{3} \sin^4 x \right) dx = \int_0^\pi \sin^2 x dx - \frac{1}{3} J$$

Car $\sin 0 = \sin \pi = 0$

3- On a $J = \int_0^\pi \sin x (\sin x - \sin x \cos^2 x) dx$ voir question 1

Il vient par intégration par parties

$$J = \left[\sin x \left(-\cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x \right) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x \right) dx = \int_0^\pi \cos^2 x dx - \frac{1}{3} I$$

Car $\sin 0 = \sin \pi = 0$

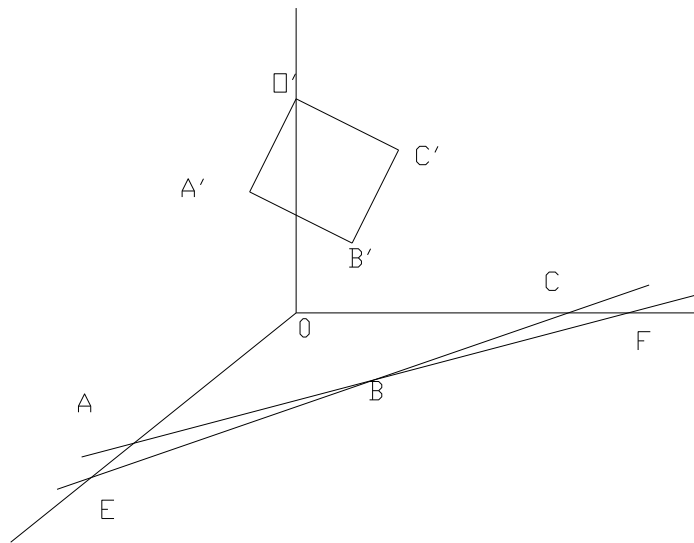
4- On en déduit $I + J = \int_0^\pi \sin^2 x dx - \frac{1}{3} J + \int_0^\pi \cos^2 x dx - \frac{1}{3} I$ donc

$$\frac{4}{3} (I + J) = \int_0^\pi (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \pi \quad \text{c'est à dire} \quad I + J = \frac{3\pi}{4}$$

Par ailleurs $\frac{4}{3} (J - I) = \int_0^\pi (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = 0$ c'est à dire $I - J = 0$

D'où $I = J$ et comme leur somme vaut $\frac{3\pi}{4}$ on a $I = J = \frac{3\pi}{8}$

EXERCICE 4



1. $E \in (OA)$ car $OE = 6i$ et $OA = 4i$; $E \in (BC)$ car $EB = 4i + 4j$ et $EC = -6i + 6j$; soit $EB = \frac{3}{2}EC$. Les droites (BC) et (OA) n'étant pas confondues (EB n'étant pas multiple de i), on en déduit que E est leur point d'intersection.

2-a On a $SE = (6; 0; -4)$ et $EF = (-6; 8; 0)$; il vient $SE \wedge EF = (32; 24; 48)$. Ce vecteur est un vecteur normal au plan (SEF) et soit $M(x; y; z)$ un point de (SEF) on en déduit $EM \cdot (SE \wedge EF) = 0$ c'est à dire $32(x - 6) + 24y + 48z = 0$ d'où l'équation cartésienne de (SEF) : $4x + 3y + 6z - 24 = 0$

b) On a $OA' = \frac{1}{4} OA + \frac{3}{4} OS$ et donc $A' = (1; 0; 3)$

c) Ce plan a une équation de la forme $4x + 3y + 6z + d = 0$. Comme il passe par A' $4+18+d = 0$ c'est à dire $d = -22$

3- a Le point O' a des coordonnées de la forme $(0 ; 0 ; k)$, pour déterminer k il suffit de remplacer x et y par 0 dans l'équation de (P) pour trouver $k = 11/3$

b) Le point C' de (P) appartient aussi à la droite (SC) dont un vecteur directeur est $SC = (0 ; 6 ; -4)$. Une représentation paramétrique de la droite (SC) est $x=0 ; y = 6+6\lambda ; z = -4\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Comme $C' \in (SC)$ et $C' \in (P)$ il vient que les coordonnées de C' vérifient les équations de (SC) (λ fixé) et l'équation de (P) . En résolvant le système d'équations ainsi obtenu on obtient $C' = (0 ; 2 ; 8/3)$.

c) La droite (SB) passe par $B = (2 ; 4 ; 0)$ et admet pour vecteur directeur $SB = (2 ; 4 ; 4)$, une représentation paramétrique de cette droite est donc $x=2+2\lambda ; y = 4+4\lambda ; z = -4\lambda$. Les coordonnées de du point B' sont solutions du système : $4x + 3y + 6z - 22 = 0$, $x=2+2\lambda ; y = 4+4\lambda ; z = -4\lambda$. La résolution conduit à $\lambda = -1/2$ et $B' = (1 ; 2 ; 2)$.

4- Le milieu de $[O'B']$ et celui de $[A'C']$ coïncident (point de coordonnées $(1/2 ; 1 ; 17/6)$)

$O'A'B'C'$ est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu donc un parallélogramme.

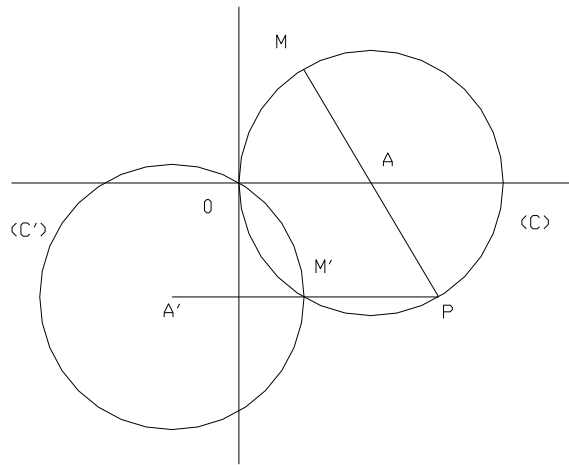
EXERCICE 5

1- Le point M a pour affixe $z = 1 + e^{2i\theta}$ d'où $|z-1| = 1$ et M appartient au cercle de centre A et de rayon 1 .

2- On a $(AB, AM) = (iAM) - (iAB) = 2\theta$. Or $\arg(z-1) = 2\theta$ (2π).

Il vient $(AB, AM) = 2\theta$ (2π). On en déduit que l'ensemble E décrit par M lorsque θ varie dans $]0, \pi[$ est le cercle (C) de centre A et de rayon 1 privé de B .

3- L'affixe z' de M' image de M est donnée par : $z' = e^{-2i\theta} \cdot z = e^{-2i\theta} + 1 = \overline{z}$. Puisque M décrit (C) et que M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses il s'ensuit que M' appartient à (C) , car (C) est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.



4- a Une rotation est une isométrie nous en déduisons que l'image du cercle (C) de centre A et de rayon 1 est le cercle (C') de centre A' et de rayon 1.

b) Nous avons $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{OM} = \left| 1 + e^{2i\frac{\pi}{3}} \right|$. Or $1 + e^{2i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

D'où $OM=1$, le triangle AMO est équilatéral.

c) On a $r(O)=O$ donc $O \in (C')$ le point M' a pour affixe

$$z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \quad z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc } |z| = |z'|$$

et $|z'-1| = |z-1|$. Par conséquent, $M' \in (C)$. les cercles (C) et (C') se coupent en O et en M'.

d) P étant le symétrique de M par rapport a A il vient $z_p - 1 = e^{i\pi}(z-1)$ soit $z_p = z + 2$.

A' ayant pour affixe $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, le milieu I de $[A', P]$ a pour affixe :

$$z_1 = \frac{2 - z + e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ Le milieu de } [A', P] \text{ est le point M'}$$

Exercice 6

1- (D1) est la droite passant par $A = (3, 9, 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_1 = (1, 3, 0)$

.Le support de la demie droite (D2) passe par $B = \left(\frac{1}{2}, 4, 4\right)$ et est dirigée par $\vec{u}_2 = (2, 1, -1)$.

2- Un point d'intersection à (D1) et (au support de) (D2) est associé à une

$$\text{solution du système } \begin{cases} 3 + a = 0.5 + 2b \\ 9 + 3a = 4 + b \\ 2 = 4 - b \end{cases}$$

Ce qui conduit à $b=2$ puis $a=1.5$ ou $4=-1$. Le système est donc incompatible et les droites sont non coplanaires (Car elles sont ni sécantes ni parallèles voir vecteur directeur non, proportionnels).

3-a) Le vecteur $\overrightarrow{AS} = (0,5,-1.9)$ n'est pas colinéaire à \vec{u}_1 donc $(A, \vec{u}_1 \otimes \overrightarrow{AS})$ est un repère de (P1). $\vec{n}_1 = \vec{u}_1 \wedge \overrightarrow{AS} = (-5.7, 1.9, -5)$ est un vecteur normal à (P1) comme $A \in (P1)$ on en déduit qu'une équation cartésienne de (P1) est

$$-5.7x + 1.9y - 5z + 10 = 0$$

Pour trouver un point d'intersection entre (P1) et (D2) on cherche à résoudre le système formé de cette équation cartésienne et des équations paramétriques de (D2)

.On trouve une solution correspondante à $b = \frac{-7}{6}$; il s'agit du point $M_2 =$

$\left(-\frac{11}{6}, \frac{17}{6}, \frac{31}{6}\right)$ qui est donc à l'intersection de (P1) et (D2).

b) Même raisonnement qu'à la question précédente : un vecteur normal à (P2) est $\vec{n}_2 = \vec{u}_2 \wedge \overrightarrow{BS} = (-3.9, 5.3, -2.5)$. On en déduit une équation cartésienne de (P2), en utilisant le fait que B est sur ce plan. On obtient :

$$-3.9x + 5.3y - 2.5z - 9.25 = 0$$

La résolution du système ainsi formé des équations de (P2) et (D1) donne $a =$

$$-\frac{29}{16} ; \text{ Le point d'intersection de (P2) et (D1) est le point } M_1 = \left(\frac{19}{16}, \frac{57}{16}, 2\right)$$

c) La droite (D1) coupe (P2) en M_1 et elle est incluse dans (P1), donc M_1 est un point commun à (P1) et à (P2). Ces plans ont donc trois points en commun : S, M_1 , M_2 . Or ils ne sont pas confondus, sinon (D1) et (D2) seraient coplanaires. Donc ils sont sécants et leur droite d'intersection (R) contient S, M_1 , M_2 . Cette droite est sécante avec chacune des droites (D1) et (D2) et l'affirmation du technicien est vraie.

QUESTIONNAIRE :

	A	B	C	D
1	Faux	Vrai	Faux	Vrai
2	Faux	Vrai	Vrai	Faux
3	Vrai	Faux	Faux	Vrai
4	Faux	Faux	Faux	Faux
5	Vrai	Faux	Faux	Faux
6	Faux	Faux	Faux	Vrai

7	Vrai	Vrai	Faux	Vrai
8	Faux	Faux	Vrai	Faux
9	Vrai	Vrai	Faux	Faux
10	Vrai	Vrai	Faux	Faux
11	Vrai	Faux	Faux	Vrai
12	Faux	Vrai	Faux	Vrai
13	Faux	Vrai	Faux	Vrai
14	Faux	Faux	Faux	Faux
15	Faux	Faux	Faux	Faux
16	Vrai	Faux	Vrai	Vrai