ENONCE DE MATHEMATIQUE ENSP YAOUNDE 2007

Niveau 1

ETUDE LIBRE
www.etudelibre.com

EXERCICE 1 (18 POINTS)

On se place dans un plan (P) muni d'un repère$(O,\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

Soient alors 3 points du plan : $A\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix}, B\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}, C\begin{bmatrix}-4\\5\end{bmatrix}$.

On noteφ, l'application qui, à tout point M ϵ (P), associe le point $M'\epsilon(P)$ qui est son projeté orthogonal sur la droite $(\mathcal{D})$ d'équation :$4x-5y-20=0$.

1) Trouver l'équation du cercle (C) passant par A, B, C, et préciser son centre Ω er son rayon R

   N.B. : 1. Représenter graphiquement la situation (unité sur les axes : 1,5 cm).

   2. Dans la suite de cet Exercice, pour chaque question, il est accepté, et même souhaitable, qu'une partie du raisonnement s'appuie sur cette représentation graphique, éventuellement complétée de manière appropriée.

2) Déterminer l'image par φ d'un point arbitraire $M\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ dans le plan(P).
3) Trouver le point Q du cercle (C) qui est le plus éloigné de la droite $(\mathcal{D})$.
4) Trouver(Γ), l'image du cercle (C) par φ.

EXRECICE 2 (27 POINTS)

On pose, $\forall\, n\in\mathbb{N}$: $\begin{cases} u_n=\frac{1}{2n+1}, I_n=\int_0^1(x^2-1)dx, \quad J_n=\int_n^{n+1}\frac{dx}{2x+1}, \\ S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k, \quad A_n=\sum_{k=0}^{n}[C_n^k(-1)^{n-k}u_k], \quad B_n=\sum_{k=0}^{n}[C_n^k(-1)^k u_k]. \end{cases}$

NOTA : $S_0=0$.

1) Montrer que : $\forall\, n\in\ \mathbb{N},\ \ A_n=B_{n,}=I_n$.
2) a) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\forall\, n\in\ \mathbb{N}^*, I_n=-\frac{2n}{2n+1}\,.I_{n-1}$.

   b) en déduire une expression de $I_n, \forall\, n\in\mathbb{N}$, seulement en fonction de $(-4)^n, (n!)^2, (2n+1)!$.
3) Montrer que la suite $(|I_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. ***N.B. mais ne pas chercher à calculer sa limite ici. Celle-ci pourra se déduire de la suite de cet Exercice.***
4) a) Montrer que : $\forall x\ \in\mathbb{R}, 1+x\ \leq e^x$.

   b) Utiliser 2) a) pour en déduire que : $\forall\, n\in\ \mathbb{N}, |I_n|\leq e^{-S_n}$.

   c) Montrer que $\forall\, n\in\ \mathbb{N}, J_n\leq u_n$ (N.B. Faire ceci sans calculer l'intégrale J_n).

   d) Démontrer alors que :$\forall\, n\in\ \mathbb{N}, |I_n|\leq\sqrt{\frac{3}{2n+3}}$.

   e) En déduire la limite de I_n quand $n\to+\infty$.

EXERCICE 3 (7POINTS)

Le réchauffement actuel de la terre provoque des changements climatiques inhabituels en différents endroits de la planète. Un exemple de ceci semble être le fait d'avoir de la pluie tôt dans l'année dans la ville de Yaoundé come il a été observé en 2008. En effet, les observations climatiques passées permettraient d'estimer que la probabilité qu'il pleuve dans cette ville au cours d'une journée du mois de Février est de 1/500. On peut aussi supposer que s'il ya eu k jours pluvieux au mois de Février, la probabilité pour qu'il pleuve au cours d'une journée donnée du mois de Mars est de $(k^2 + 25)/100$.

1) Quelle était alors la probabilité, avant le début de l'année, d'avoir 5 jours pluvieux en Février 2008 ?
2) Maintenant, si on a effectivement eu 5 jours pluvieux en Février 2008, quelle était alors la probabilité d'en avoir 15 le mois suivant.

PROBLEME (48 POINTS)

Ci après, la courbe représentative d'une fonction désigne sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

I. *Etude de la fonction d'une variable réelle : $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{2}{2x+1}$.*

1) a) Trouver $\mathcal{D}_f$, le domaine de définition de f dans $\mathbb{R}$.
   b) Calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
   c) Calculer la dérivée de f, là où elle existe dans $\mathcal{D}_f$.
2) a) Etudier les variations de f sur $\mathcal{D}_f$, et dresser le tableau de variations.
   b) Préciser, s'il y en a, toute(s) asymptote(s) à C_f , la courbe représentative de f.
   c) Tracer C_f **(unité des axes : 2,5 cm).**
3) a) Soit λ, un réel vérifiant : $-2 < \lambda < -1$. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équations respectives : $x = -2 \quad et \quad x = \lambda$.
   b) Calculer la limite $\mathcal{A}(\lambda)$ quand $\lambda \to -1$ par valeurs inférieures.
   c) Donner une représentation graphique de cette limite relativement au tracé effectué en 2) c).

II. *Etude de la fonction d'une variable réelle : $g(x) = (\frac{x}{x+1})^{\sqrt{x^2+x}}$*

1) a) Trouver $\mathcal{D}_g$, le domaine de g dans $\mathbb{R}$
   b) Calculer les limites de g aux bornes de$\mathcal{D}_g$.
   c) Exprimer la dérivée g'(x), là où elle existe dans$\mathcal{D}_g, en\ fonction\ de\ x$, $f(x) et\ g(x)$.
   d) En déduire les variations de g sur$\mathcal{D}_g$, et dresser le tableau de variations.
2) a) Etablir une relation entre $g(-x-1)$ et $g(x)$, $\forall\, x \in \mathcal{D}_g$.
   b) Expliquer alors brièvement, mais clairement, pourquoi en **II-1) d),** l'étude des variations de g entre 0 et ∞ aurait suffit pour pouvoir déduire le tableau des variations de g sur tout$\mathcal{D}_g$.

III. ***Etude de la fonction d'une variable réelle définie par :*** $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_g,\ f(x) = g(x)$ *et* $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_g,\ h(x) = \beta$.

***Ici* 1.** β *est une constante réelle qu'on va choisir ci après ;*

2. *«* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_g$ *» signifie que «* $x \in \mathbb{R}$ *et* x *n'appartient pas à* $\mathcal{D}_g$

1) Trouver la valeur de β qui rend la fonction h continue partout dans $\mathbb{R}$.

   N.B. : On fixe $\boldsymbol{\beta}$ ***à cette valeur dans toute la suite***

2) Avec cette valeur de β, la fonction h devient-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
3) Préciser, s'il y en a, toute(s) asymptote(s) à C_h, la courbe représentative de h.
4) Tracer C_h **(unité d'axes : 2 cm)**