



ENONCE DE MATHEMATIQUE ENSP YAOUNDE 2001

Niveau 1



Durée 4h

EXERCICE I

I- On note z_1 et z_2 les racines de l'équation $z^2+az+b=0$, où $a, b \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $(|z_1| = |z_2| = 1)$ si et seulement si $(|b| = 1, |a| \leq 2 \text{ et } \arg b = 2 \arg a)$

II- Pour $a, b, c \in \mathbb{C}^*$, on considère les trois propriétés suivantes :

$$|a-b| = |b-c| = |a-c|$$

j ou j^2 est solution de $az^2+bz+c=0$ (avec $j = \exp(i2\pi/3)$)

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$$

1⁰) Montre que si $a=b$, chacune de ces propriétés implique $a=b=c$. Expliquer alors pourquoi on peut supposer a, b et c distincts deux à deux.

2⁰) Montrer que ces trois propriétés sont équivalentes (On pourra poser : $u = (a-b)/(b-c)$)

III- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ (N.B : On écrira les solutions sous forme la plus simple possible). Combien y a-t-il de solutions ? Pouvait-on s'y attendre ?

Exercice 2

Pour tout $k \in \mathbb{R} \setminus \{-0,1\}$, on définit $f_k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, telle que $f_k(x) = \exp[x^k \ln(x)]$.

1⁰) Étudier la limite de f_k à la droite de $x=0$. En déduire un prolongement F_k de f_k qui soit défini et continu sur \mathbb{R}^* (On distinguera $k>0$ et $k<0$)

2) Étudier la dérivabilité de F_k à la droite de $x=0$. (On admettra pour cela que si φ est une application définie et continue sur $]0,1[$, telle que la limite de $\varphi(x)$, lorsque $x \rightarrow 0, x>0$, soit 0, alors les limites, lorsque $x \rightarrow 0, x>0$, de $[\exp(\varphi(x))-1]/x$ et de $\varphi(x)/x$ sont égales)

3⁰) Étudier les variations des fonctions F_k et construire les diverses formes de leurs représentations graphiques C_k dans un repère orthonormé d'unité 2,5cm. (On ne demande pas de chercher les points d'inflexion, mais on précisera soigneusement la position des deux coordonnées x_i et y_i des extremums éventuels par rapport à 1 et à $\alpha = \exp(-1) = 0,36$; par rapport à 1 et à $\beta = \exp(-e^{-1}) = 0,69$ respectivement)

EXERCICE 3

(NB : Les probabilités demandées seront données sous forme de fractions irréductibles).

Dans un laboratoire, une cage contient 5 souris blanches et 15 souris grises.

1⁰) On prélève une souris au hasard, on note sa couleur et on le remet dans la cage. Cette opération est effectuée 8 fois.

Quelle est la probabilité pour qu'on ait exactement deux souris blanches ?

Calculer le nombre minimum n de prélèvement à effectuer pour que la probabilité de prélever au moins une souris blanche soit supérieure ou égale à $0,95$ (NB : $\ln 2 = 0,62$; $\ln 3 = 1,10$; $\ln 5 = 1,61$).

Peut-on trouver un tel nombre n pour que l'évènement du b) soit certain ?

2⁰) On prélève cette fois-ci 8 souris d'un coup. Calculer la probabilité de l'évènement du 1⁰)a)

EXERCICE 4S

(NB : On ne demande pas de figure).

Soit dans un plan affine euclidien P un triangle équilatéral ABC , dont la longueur d'un côté est a . On désigne par O le milieu du segment $[B,C]$, par G le centre de gravité du triangle ABC et par O' le symétrique de G par rapport à O .

1⁰) Déterminer le barycentre des points G et O , respectivement affectés des coefficients 3 et 2. —

Quel est l'ensemble E_1 des points M de P tels que $\| -3\vec{MG} + 2\vec{MO} \| = \| \vec{MO}' \|$?

2⁰) Déterminer l'ensemble E_2 des points M de P tels que $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = k$, avec $k \in \mathbf{R}$.

Comment choisir k pour que cet ensemble contienne le point G ?

3⁰) Démontrer que, pour tout M appartenant à P , $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + a^2$.

Déterminer l'ensemble E_3 des points M de P tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$