CORRIGE DE MATHEMATIQUE ENSP YAOUNDE SUJET I 2005

Niveau 1

ETUDE LIBRE
www.etudelibre.com

EXERCICE 1 : Suite et fonction

1)

On a : $P_3(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1$ et $P_3^{'}=\frac{1}{2}x^2+x+1$ et enfin $P_3^{''}=x+1$

La représentation de la courbe est facile.

2) a)soit une fonction polynôme réelle de degré n $P(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, $a_n\neq 0$

$P^{'}(x)=\sum_{i=1}^{n-1}ia_ix^{i-1}$ qui est un polynôme de degré n-1

Donc cette condition n'est pas satisfaisante par une fonction polynôme à variable réelle

b) On a :

$$f_3(x)=\frac{1}{6}x^3+f_2(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+f_1(x)+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1=P_3(x)$$

c) Montrons par récurrence que : $\forall n\in IN, f_n(x)=\sum_0^n\frac{x^i}{i}$

On a : $f_0(x)=\sum_0^0\frac{x^0}{0!}=1$ et $f_0(x)=1$

Supposons que : $f_n(x)=\sum_0^n\frac{x^i}{i!}$ pour $n\geq 0$. Il vient :

$f_{x+1}(x)=f_x(x)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\sum_0^n\frac{x^i}{i!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\sum_0^{n+1}\frac{x^i}{i!}$ Donc : $\forall n\in IN, f_n(x)=\sum_0^n\frac{x^i}{i!}$

d)

$$f_{10}(2)=\sum_0^{10}\frac{2^i}{i!} \text{ et } f'_{10}(2)=\sum_1^{10}\frac{2^{i-1}}{(i-1)!}=\sum_0^{9}\frac{2^i}{i!}=f_9(2)$$

D'où : $f_{10}(2)-f'_{10}(2)=f_{10}(2)-f_9(2)=\frac{2^{10}}{10!}=\frac{4}{14175}$

EXERCICE 2 : Plan complexe

Valeurs éventuelles de z telles que A, B et C ne soient pas distincts deux à deux

On a : $z_A = z_B = z_C \Leftrightarrow \begin{cases} z_A = z_B \\ z_A = z_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = z^2 \\ z = z^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z(z-1) = 0 \\ z(z-1)(z+1) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow z = 0$ ou $z = -1$ ou $z = 1$ donc $z \in \{-1,0,1\}$

Partie E des points A de P telle que A, B et C soient alignés

$$E = \left\{ A(z) \in P / \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \Re^*; z_A \neq z_B \neq z_C \right\}$$

On a : $\dfrac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \dfrac{z(z-1)(z+1)}{z(z-1)} = z+1$ car $z \notin \{-1,0,1\}$

D'où : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = z+1 = x+1+iy \in \Re^* \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ y = 0 \end{cases}$

Donc : E= $\{A(z) \in P; z = x+iy \text{ avec } (x,y) \in \Re^2 / x \neq -1 \text{ et } y = 0\}$

Montrons que A, B et C ne peuvent pas appartenir à un même cercle centré en O autre que le cercle de centre O et de rayon 1

Pour cela, supposons que A, B et C appartienne au cercle centré en O
$(\Gamma_n): x^2 + y^2 = n^2 / n \in \Re_+$ et montrons que $n \in \{0,1\}$

$$\begin{cases} A \in (\Gamma_n) \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{OA}\right\| = n \Leftrightarrow |z| = n \\ B \in (\Gamma_n) \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{OB}\right\| = n \Leftrightarrow |z^2| = n \\ C \in (\Gamma_n) \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{OC}\right\| = n \Leftrightarrow |z^3| = n \quad (1) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow n^3 = n \Rightarrow n(n-1)(n+1) = 0 \Rightarrow n = 0 \text{ ou } n = 1$

Conclusion : A, B et C ne peuvent pas appartenir à un même cercle centré autre que les cercles de rayon 0 et 1

4) On veut que le triangle ABC soit rectangle en C. Montrons que A doit appartenir au cercle Γ de centre $\Omega(-\frac{1}{2},0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé des point à préciser .

ABC est rectangle en C si et seulement si $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \in i\Re^*$ Or $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{z^2(1-z)}{z(1-z)(1+z)}$

Donc $\forall z \notin \{-1,0,1\}$, $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{z}{z+1} = \dfrac{x+iy}{x+1+iy} = \dfrac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2} + i\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$

Donc $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \in i\Re^* \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+x+y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$

Conclusion : A doit appartenir au cercle

Γ de centre $\Omega(-\frac{1}{2},0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé des points d'affixes -1,0,1 .

5) Partie G de P pour que $z_C \in \Re_+^*$

On a : $z_C = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

Donc $z_C \in \Re_+^* \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } 3x^2 - y^2 = 0 \\ x^3 - 3xy^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x < 0 \\ y^2 = 3x^2 \end{cases}$

Conclusion : A doit appartenir à la partie G de P définie par
G = $\{A(z) \in P; z = x+iy / (x > 0 \text{ et } y = 0) \text{ou} (x < 0 \text{ et } y^2 = 3x^2)\}$

6) Lieu I des points A pour lequel le triangle ABC est isocèle

*ABC isocèle en A ssi $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\| \Leftrightarrow |z_A - z_B| = |z_A - z_C| \Leftrightarrow |z(z-1)| = |z(z-1)(z+1)|$

Or $|z+1| = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1$

**ABC isocèle en B ssi $\|\vec{BA}\| = \|\vec{BC}\| \Leftrightarrow |z_A - z_B| = |z_C - z_B| \Leftrightarrow |z(z-1)| = |z^2(z-1)|$

Or $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

***ABC isocèle en C ssi $\|\vec{CA}\| = \|\vec{CB}\| \Leftrightarrow |z_A - z_C| = |z_B - z_C| \Leftrightarrow |z(z+1)(z-1)| = |z^2(z-1)|$

Or $|z+1| = |z| \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Conclusion : I= $\left\{A(z) \in P / (x+1)^2 + y^2 = 1 \text{ ou } x^2 + y^2 = 1 \text{ ou } x = -\dfrac{1}{2}\right\}$

7) Forme exponentielle des points éventuels a tels que ABC soit équilatéral

ABC équilatéral ssi

$\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\| = \|\vec{BC}\| \Leftrightarrow \begin{cases} \|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\| \\ \|\vec{AB}\| = \|\vec{BC}\| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y^2 = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} ou \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $z_A = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Exercice 3 : Majorations

1)

On a : $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow |f'(x)| = \dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1 \Rightarrow \forall x, y \in IR, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$

2)

$|g(x)| \leq M \Rightarrow -M \leq g(x) \leq M \Rightarrow -M(y-x) \leq G(y) - G(x) \leq M(y-x)$

$\Rightarrow |G(y) - G(x)| \leq M|y-x| \Rightarrow |G(x) - G(y)| \leq M|x-y|$

3)

Soient k_1 et k_2, deux éléments de P .On a :

$|(k_1 + k_2)(x) - (k_1 + k_2)(y)| \leq |k_1(x) - k_1(y)| + |k_2(x) + k_2(y)|$

$\leq (\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2})|x-y|$ Donc $k_1 + k_2 \in P$

4)

$|k_1(k_2(x)) - k_1(k_2(y))| \leq \lambda_{k_1}|k_2(x) - k_2(y)| \leq \lambda_{k_1}.\lambda_{k_2}|x-y|$. Donc, $k_1 \circ k_2 \in P$

5)

On a : $\varphi'(x) = \dfrac{1}{3}\cos(x) \Rightarrow |\varphi'(x)| \leq \dfrac{1}{3} \Rightarrow \forall x, y \in IR, |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \dfrac{1}{3}|x-y|$

Puisque la suite (u_n) est réelle, il vient : $|\varphi(u_n) - \varphi(\pi)| \leq \dfrac{1}{3}|u_n - \pi|$

Ce qui par multiplications successives membre à membre : $|u_n - \pi| \leq \dfrac{1}{3^n}|u_0 - \pi|$

6)

On a : $\theta(x) = e^{-x^2} \Rightarrow \theta'(x) = -2xe^{-x^2}$ ce qui donne le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$

$\theta'(x)$	+	0	-
$\theta(x)$	0 $\nearrow$	1	$\searrow$ 0

Il s'en suit : $|\theta(x)| \leq 1 \Rightarrow |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq |x - y|$.Donc : $\Phi \in P$

7)

Pour $1 \leq t \leq x$, on a $t \leq t^2 \Rightarrow \int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_1^x e^{-t} dt$

Déduction : $\Phi(x) = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_0^x e^{-t^2} dt \Rightarrow \int_0^1 e^{-t^2} dt \leq \Phi(x) \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t} dt$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_1^x e^{-t} dt = e^{-1} \Rightarrow k \leq \lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) \leq k + e^{-1}$ ce qui fallait démontrer.

<u>Exercice 4. Etude de fonction</u>

Montrons que la fonction $x \mapsto \tan x$ admet une application réciproque notée $Arc\tan$ est bijective sur IR

La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et on a:

$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x > 0$ .De plus $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$

Ainsi, la fonction $x \mapsto \tan x$ est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et par suite, elle admet une application réciproque notée $Arc\tan$ bijective sur IR

Justifions que $Arc\tan x$ est dérivable sur IR et calculons $(Arc\tan x)'$

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan' x = 1 + \tan^2 x \neq 0$ donc $Arc\tan$ est dérivable sur IR et

$$\forall x \in IR, \quad Arc\tan' x = \frac{1}{\tan'(\tan^{-1} x)} = \frac{1}{\tan' y} \text{ avec } y = \tan^{-1} x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2} \text{ D'où, } Arc\tan' x = \frac{1}{1 + x^2}$$

3) Déterminons un prolongement par continuité en O de la fonction φ définie par $\varphi(x) = \frac{Arc\tan x}{x}$

$D_\varphi = IR^*$ et $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = 1$ Ainsi, un prolongement par continuité de φ φ en x = 0 est la fonction Φ définie sur IR par $\begin{cases} \Phi(x) = \varphi(x), \forall x \in IR^* \\ \Phi(0) = 1 \end{cases}$

4) calcul de $Arc\tan''(0)$ et $Arc\tan'''(0)$

$\forall x \in IR, Arc\tan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est deux fois dérivable sur IR et :

$\forall x \in IR, Arc\tan''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ et $Arc\tan'''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$

D'où: $Arc\tan''(0) = 0$ et $Arc\tan'''(0) = -2$

5) Pour $x > 0$, montrons que $0 \le x - Arc\tan x \le \frac{x^3}{3}$

La fonction $x \mapsto Arc\tan x$ est deux fois dérivables sur IR et on a : $Arc\tan''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} < 0$. Ainsi, la fonction $Arc\tan$ est située

En dessous de chacune de ses tangents en tout point de IR^*.La tangente en 0 a pour équation : $y = x$ .D'où $Arc\tan x \le x$ soit $x - Arc\tan x \ge 0 \quad \forall x \in IR^*_+$

**considérons la fonction F définie sur IR^*_+ par :

$F(x) = x - Arc\tan x - \frac{x^3}{3}$

F est dérivable sur IR^*_+ et on a : $F'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} - x^2 = \frac{-x^4}{1+x^2} < 0$ .Donc F est décroissante sur IR^*_+ .De plus, $\lim_{x\to 0^+} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to +\infty} F(x) = +\infty$ .On a le tableau de variation suivant.

x	**0**	$+\infty$
$F'(x)$	-	

$F(x)$	0 $\searrow$ $-\infty$

Ainsi, on peut conclure que : $\forall x \in IR^*,\ \ 0 \le x - Arc\tan x \le \dfrac{x^3}{3}$

6) Montrons que $0 \le 1 - f(x) \le \dfrac{x^2}{9}$ avec

$$1 - f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{t - Arc\tan t}{t}dt \ ,x > 0$$

On déduit de la question précédente que : $\forall t \in IR^*{}_+,\ 0 \le \dfrac{t - Arc\tan t}{t} \le \dfrac{t^2}{3}$

$$\Rightarrow 0 \le \int_0^x \frac{t - Arc\tan t}{t}dt \le \frac{x^3}{9} \Rightarrow 0 \le \frac{1}{x}\int_0^x \frac{t - Arc\tan t}{t}dt \le \frac{x^2}{9} \Rightarrow 0 \le 1 - f(x) \le \frac{x^2}{9}$$

7) déterminons un prolongement par continuité à droite de 0 de la fonction f

$0 \le 1 - f(x) \le \dfrac{x^2}{9} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \le 1 \\ f(x) \ge 1 - \dfrac{x^2}{9} \end{cases} \Rightarrow 1 - \dfrac{x^2}{9} \le f(x) \le 1$. Par suite,

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ et $D_f = IR^*{}_+$. Ainsi, un prolongement par continuité à droite de 0 de la fonction f est la fonction F_1 définie par : $\begin{cases} \forall x \in IR^*{}_+, F_1(x) = f(x) \\ F_1(0) = 1 \end{cases}$

*pente de la demi tangente à la courbe représentative de f en ce point

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{F_1(x) - F_1(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x} = 0$ .Ainsi, la pente de la demi tangente à la courbe représentative de f en ce point est 0

8) Montrons que si $x \ge 1,\ alors \displaystyle\int_1^x \frac{Arc\tan t}{t}dt \le \frac{\pi}{2}\ln x$

On a : $Arc\tan t \le \dfrac{\pi}{2} \ \Rightarrow \displaystyle\int_1^x \frac{Arc\tan t}{t}dt \le \frac{\pi}{2}\int_1^x \frac{1}{t}dt = \frac{\pi}{2}\ln x$

9) Montrons que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$$f(x)=1-\frac{1}{x}\int_0^x \frac{t-\arctan t}{t}dt=1-\frac{1}{x}\int_0^1(1-\frac{Arc\tan t}{t})dt-\frac{1}{x}\int_1^x(1-\frac{Arc\tan t}{t})dt$$

$$f(x)=-\frac{1}{x}\int_0^1(1-\frac{Arc\tan t}{t})dt+\frac{1}{x}\int_1^x\frac{Arc\tan t}{t}dt+\frac{1}{x}$$

On peut donc déduire : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x\frac{Arc\tan t}{t}dt$ .par ailleurs,

$$0\le\frac{1}{x}\int_1^x\frac{Arc\tan t}{t}dt\le\frac{\pi}{2}\frac{\ln x}{x}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

10) On pose $g(x)=x^2f'(x)$ pour $x>0$. Montrons que

$$g(x)=Arc\tan x-\int_0^x\frac{Arc\tan t}{t}dt$$

$$f(x)=1-\frac{1}{x}\int_0^x\frac{t-Arc\tan t}{t}dt\ .$$

f est dérivable sur IR^*_+ et $\forall x\in IR^*_+$, $f'(x)=\frac{1}{x^2}\left(\int_0^x(1-\frac{Arc\tan t}{t})dt-x+Arc\tan x\right)$

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}\left(Arc\tan x-\int_0^x\frac{Arc\tan t}{t}dt\right)\ \text{cqfd.}$$

11) on pose $h(x)=xg'(x)$. calcul de $h'(x)$

$$h'(x)=g'(x)+xg''(x)=(\frac{1}{1+x^2}-\frac{Arc\tan x}{x})+x\left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}-\frac{x-(1+x^2)Arc\tan x}{x^2(1+x^2)}\right)$$

D'où : $h'(x)=-\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$

12) Etude des variations de f et g sur IR^*_+

*Variations de h

$$h(x)=\frac{x}{1+x^2}-Arc\tan x$$

$\lim_{x\to0^+}h(x)=0$; $\lim_{x\to+\infty}h(x)=-\frac{\pi}{2}$; $h'(x)=-\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}<0$. Ce qui donne le tableau de variations suivant

x	0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$		0 $\searrow$	$-\dfrac{\pi}{2}$

**Variations de g

$g'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$ Or, $h(x) < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$ .Par suite, g est strictement décroissante sur IR^{*}_{+}

et $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ et donc $g(x) < 0$

***Variations de f

$f'(x) = \dfrac{x^2}{g(x)}$ et $g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$: donc f est strictement décroissante sur IR^{*}_{+}

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} = 1$.d'où la tableau de variation suivant

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	

$f(x)$		1 $\searrow$ 0

le tracé de la courbe est facile.

<u>Exercice 5 : Partage équitable</u>

Déterminons $\Gamma_1 = \{M \in P / d(M;C_1) = d(M;\Delta)\}$

Γ_1 est une parabole ;il faut donc déterminer son équation

Soit $M(x,y) \in P \Leftrightarrow d(M,C_1) = MC_1 - R_1 = \sqrt{(x+2)^2 + (y-10)^2} - 1$ et $d(M,\Delta) = |y|$

$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-10)^2} - 1 = |y| \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-10)^2 = (y+1)^2$ Car y > 0

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 22(y - \frac{9}{2})$$

Déterminons $\Gamma_2 = \{M \in P / d(M;C_1) = d(M;C_2)\}$

Γ_2 est une hyperbole .déterminons son équation Soit $M(x,y) \in P \Leftrightarrow d(M,C_1) = M\Omega_1 - R_1 = \sqrt{(x+2)^2 + (y-10)^2} - 1$ et

$d(M,C_2) = \sqrt{(x-4)^2 + (y-10)^2} - 2$

$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-10)^2} + 1 = \sqrt{(x-4)^2 + (y-10)^2}$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-10)^2 = 36(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow (y-10)^2 = (5x+8)(7x-4) \Leftrightarrow \frac{1225}{324}(x - \frac{38}{35})^2 - \frac{35}{324}(y-10)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{38}{35}\right)^2}{\frac{324}{1225}} - \frac{(y-10)^2}{\frac{324}{35}} = 1$$

Déterminons $\Gamma_3 = \{M \in P / d(M;C_2) = d(M;C_3)\}$

Γ_3 est une ellipse .déterminons son équation.

$$M(x,y)\in P \Leftrightarrow d(M,C_2)=M\Omega_2-R_2=\sqrt{(x-4)^2+(y-10)^2}-2 \text{ et}$$

$$d(M,C_2)=M\Omega_3-R_3=\sqrt{x^2+(y-10)^2}-8$$

$$M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-10)^2}-8=\sqrt{(x-4)^2+(y-10)^2-2}$$

$$\Leftrightarrow 2x+5=3\sqrt{x^2+(y-10)^2} \Leftrightarrow 5(x-2)^2+9(y-10)^2=45$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-10)^2}{5}=1$$