



---

# ENONCE DE MATHEMATIQUE ENSP YAOUNDE 2003

---

Niveau 1



Durée : 4 heures

EXERCICE 1

1. Soit la fonction définie sur  $[1; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{x}$

(a) Etudier les variations de f.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,  $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$

(c) Démontrer de même que, pour tout entier n non nul,  $\ln(n+1) - \ln(n) \geq \frac{1}{n+1}$

2. Soit la suite définie pour tout entier n non nul par  $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

(a) Montrer que, pour tout entier n non nul,  $u_n \geq \ln(n+1)$

(b) Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$

3. Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier n non nul par  $v_n = u_n - \ln(n)$ .

(a) Etudier le sens de variation de  $(v_n)$ .

(b) En déduire que la suite  $(v_n)$  est convergente.

4. Pour tout entier  $n \geq 2$ , on définit la suite  $(w_n)$  par  $w_n = \frac{u_n}{\ln(n)}$

(a) Montrer que, pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $1 \leq w_n \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$

(b) Déterminer la limite de la suite  $(w_n)$

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté au repère ortho normal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ; unité graphique : 2 cm. Soient

$A_0$  le point d'affixe 2,  $A_0'$  le point d'affixe  $2i$  et  $A_1$  le milieu du segment  $[A_0A_0']$ . Plus généralement, si  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$ , on désigne par  $A_n'$  le point d'affixe  $z_n' = iz_n$  et par  $A_{n+1}$  le milieu du segment  $[A_nA_n']$ . On note  $\rho_n$  et  $\theta_n$  le module et l'argument de  $z_n$ .

1. Déterminer les affixes des points  $A_0, A_0', A_1, A_1', A_2, A_2'$  et  $A_3$ . Placer ces points sur une figure.

2. Calculer  $\rho_0, \rho_1, \rho_2$  et  $\rho_3$  ainsi que  $\theta_0, \theta_1, \theta_2$  et  $\theta_3$ .
3. Pour tout entier n, exprimer  $z_{n+1}$  en fonction de  $z_n$ . En déduire  $z_n$  en fonction de n
4. Etablir les expressions de  $\rho_n$  et  $\theta_n$  en fonction de n.
5. Déterminer la limite de  $\rho_n$  quand n tend vers  $+\infty$
6. Comparer les modules et les arguments de  $z_n$  et  $z_{n+8}$
7. Etablir que  $A_n A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{n-1} A_n$
8. Après avoir exprimé  $A_n A_{n+1}$  en fonction de n, déterminer en fonction de n, la longueur de la ligne brisée  $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$ . Déterminer la limite de  $l_n$  quand n tend vers  $+\infty$

### EXERCICE 3

Soient 3 points de l'espace A, B et C non alignés et soit k un réel de l'intervalle  $[-1;1]$ . On note  $G_k$  le barycentre du système  $\{(A, k^2 + 1), (B, k), (C, -k)\}$ .

1. Représenter trois points non alignés A, B, C le milieu I de  $[BC]$  et les points  $G_1$  et  $G_{-1}$  correspondant
2. Montrer que, pour tout réel k de l'intervalle  $[-1;1]$ , on a :  $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2 + 1} \overrightarrow{BC}$
3. Etablir le tableau de variation de la fonction f définie sur  $[-1;1]$  par  $f(x) = \frac{-x}{x^2 + 1}$ .
4. En déduire l'ensemble des points  $G_k$  quand k décrit l'intervalle  $[-1;1]$
5. déterminer l'ensemble E des points M de l'espace tels que :  $[AC]$   
 $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$
6. Déterminer l'ensemble F des points de l'espace tels que  
 $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$
7. L'espace est maintenant rapporté à un repère ortho normal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . les points A, B, C ont pour coordonnées respectives  $(0; 0; 2), (-1; 2; 1), (-1; 2; 5)$ . le point  $G_k$  et les ensembles E et F sont définis comme ci-dessus.

(a) Calculer les coordonnées de  $G_1$  et  $G_{-1}$ . Montrer que les ensembles E et F sont sécants.

(b) Calculer le rayon du cercle C intersection de E et F.

### EXERCICE 4

On pose  $I_0 = \int_0^{\pi/6} \sin(3x)dx$  et, pour tout entier naturel n non nul  $I_n = \int_0^{\pi/6} x^n \sin(3x)dx$

1. Calculer  $I_0$

2. En utilisant une intégration par parties, calculer  $I_1$

3. En utilisant deux intégrations par parties successives, déterminer, lorsque  $n \geq 1$ ,  $I_{n+2}$  en fonction de  $I_n$

4. Vérifier que  $I_3 = \frac{\pi^3}{108} - \frac{2}{27}$

5. Sans calculer l'intégrale  $I_n$

(a) Montrer que la suite  $(I_n)$  est monotone

(b) Pour tout entier naturel n non nul, comparer  $I_n$  à  $\int_0^{\pi/6} x^n dx$

(c) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

### EXERCICE 5

#### PARTIE A

On appelle (E) l'équation différentielle  $y'' - y = 0$ , où y est une variable numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble IR des nombres réels.

1. Déterminer les nombres réels r tels que la fonction h, définie par  $h(x) = e^{rx}$ , soit solution de (E)

2. Vérifier que les fonctions  $\varphi$  définies par  $\varphi(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres réels, sont les solutions de (E). On admet qu'on obtient ainsi toutes les solutions de (E)

3. Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées  $\left(\ln 2; \frac{3}{4}\right)$  et admet en ce point une tangente dont le coefficient directeur est 5/4

PARTIE B

On appelle  $f$  la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ . On désigne par  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère ortho normal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Soit  $\mu$  un nombre réel. Montrer que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $f(x) = \mu$  est équivalent à  $e^{2x} - 2\mu e^x - 1 = 0$ . En déduire que l'équation  $f(x) = \mu$  a une unique solution dans  $\mathbb{R}$  et déterminer sa valeur en fonction de  $\mu$ .
2. Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
3. Calculer  $f'(x)$  pour tout nombre réel  $x$  et en déduire le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
5. En étudiant le sens de variation de la fonction  $d$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $d(x) = f(x) - x$ , préciser la position de (C) par rapport à (T).
6. Tracer (C) et (T) (unité graphique 2cm)
7. Soit  $D$  la partie représentant sur le graphique l'ensemble des points  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  tels que  $0 \leq x \leq 1$  et  $x \leq y \leq f(x)$ . Calculer, en cm, l'aire de  $D$ .

Partie C

On cherche à caractériser les fonctions  $\Phi$ , dérivables sur l'ensemble des nombres réels, telles que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $\Phi(x) - \int_0^x (x-t)\Phi(t)dt = x$ . Notons (H) cette relation.

1. On suppose qu'il existe une telle fonction  $\Phi$ .

(a) Justifier que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $\Phi(x) = x + x \int_0^x \Phi(t)dt - \int_0^x t\Phi(t)dt$

Calculer  $\Phi(0)$

(b) Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $\Phi'(x) = 1 + \int_0^x \Phi(t)dt$ . Calculer  $\Phi'(0)$

(c) Vérifier que  $\Phi$  est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.

Déterminer lequel, parmi toutes les solutions explicitées dans la question A.

2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\int_0^x (e^t - e^{-t})dt$

3. Démontrer que la fonction trouvée à la question C.1.c vérifie la relation (H).