



ENONCE DE MATHEMATIQUE ENSP YAOUNDE 2009

Niveau 1



9.	<p>La transformation qui à tout point $M(x, y)$ associe $M'(x', y')$ telle que</p> $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \end{cases}$ <p>A) admet 0 comme point invariant ; B) n'admet pas de point invariant ; C) est une rotation ; D) est une homothétie</p>
10.	<p>Soit P un plan d'équation cartésienne $x + 2y - 3z - 1 = 0$, la sphère de centre $B(0, 4, -3)$, de rayon 1 :</p> <p>A) coupe le plan P suivant un cercle B) est tangente au plan P ; C) ne coupe pas le plan P</p>
11.	<p>Soit l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs. Laquelle des quatre affirmations suivantes est vraie.</p> <p>A) Les solutions de (E) sont toute de la forme $(x, y) = (34k - 7 ; 5 - 25k), k \in \mathbb{Z}$. B) L'équation (E) n'a aucune solution ; C) Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x, y) = (-7k ; 5k), k \in \mathbb{Z}$. D) Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x, y) = (17k - 7 ; 5 - 12k), k \in \mathbb{Z}$.</p>
12.	<p>La forme polaire de l'équation cartésienne $3x - 4y + 5 = 0$ est :</p> <p>A) $1 = r \cos(\theta - 127^\circ)$; B) $1 = r \cos(\theta - 53^\circ)$; C) $\frac{4}{5} = r \cos(\theta - 53^\circ)$; D) $\frac{-3}{5} = r \cos(\theta - 127^\circ)$;</p>
13.	<p>La solution de l'équation différentielle $(y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx - xdy = 0$ pour $y=0$ quand $x=1$ est égale à :</p> <p>A) $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$; B) $y = (x^2 - 1)$; C) $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$; D) $y = \frac{1}{2}x^2$</p>
14.	<p>La somme $\sum_{i=1}^n a_1 r^{i-1}$ est égale à :</p> <p>A) $\frac{a_1(1-r)^n}{1-r}$; B) $\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$; C) $\frac{a_1(1-r)^n}{r-1}$; D) $\frac{a_1(1-r^n)}{r-1}$</p>
15.	<p>$\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ est égale à :</p> <p>A) $2 + \sqrt{3}$; B) $3 - \sqrt{2}$; C) 2 ; D) $2 - \sqrt{3}$</p>
16.	<p>L'expression $e^{(2-2i)\theta}$ est égale à :</p> <p>A) $e^{2\theta} + i \sin 2\theta$; B) $\cos 2\theta - i \sin 2\theta$; C) $e^{2\theta}(\cos 2\theta - i \sin 2\theta)$ D) $e^{2\theta}(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$</p>
17.	<p>Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x, & x \leq -1 \\ x^2 + bx, & -1 < x < 0 \\ x^2 + 2x + k, & x \geq 0 \end{cases}$ telle que $f(x)$ est continue dans l'intervalle $[-2, 2]$, les valeurs de b et k sont :</p> <p>A) $b = -6, k = 0$; B) $b = 6, k = 0$ C) $b = 0, k = 0$ D) $b = 0, k = 6$</p>
18.	<p>L'équation vectorielle différentielle $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}$ a pour solution générale :</p>

	A) $\vec{v} = Ae^t$; $(A + B)e^t$	B) $\vec{v} = \vec{A}e^t$;	C) $\vec{v} = \vec{A} + \vec{B}e^t$;	D) $\vec{v} =$
19.	Dans le plan complexe, on considère la transformation $T: z \rightarrow \omega(z) = \frac{4z+9}{z-4}$; alors, $\omega(-3i)$ est égale à :			
	A) $3i$;	B) $-3i$;	C) 3 ;	D) -3
20.	Soient P le plan d'équation cartésienne : $2x - y + z = 4$; la droite de vecteur directeur $\vec{r} = i + 2j - k + \lambda(i - j + k)$, l'angle entre le plan et la droite a pour sinus :			
	A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$;	B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;	C) $\frac{\sqrt{6}}{5}$;	D) $2\frac{\sqrt{2}}{3}$

PARTIE B

Q1. Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on donne les points A, B et C d'affixe respectives $i, \sqrt{2}$ et $\sqrt{2} + i$. On appelle I, J et K les milieux respectifs des segments $[OB]$; $[AC]$ et $[BC]$ et S la similitude directe qui transforme A en I et O en B .

- i) a) Déterminer le rapport et l'angle de S .
- b) Donner l'écriture complexe de S .
- c) En déduire l'affixe ω du centre Ω de S . Représenter Ω dans le plan P .
- d) Quelle est l'image par S du rectangle $AOBC$?
- ii) On considère la transformation $S^2 = SoS$.
- a) Quelles sont les images des points O, B et A par S^2 ?
- b) Montrer que S^2 est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
- c) En déduire que les droites (OC) , (BJ) et (AK) sont concourantes.
- iii) On définit la suite de points A_n de la façon suivante : $A_0 = A$ et pour tout entier naturel $n, A_{n+1} = S(A_n)$
- a) Préciser les points A_1, A_2 , et A_3 sur la figure de i-c).
- b) On note U_n la longueur du segment $[A_n A_{n+1}]$. Exprimer U_n en fonction de U_{n-1} .
- c) Calculer U_0 et en déduire U_n en fonction de n .

Q2. A/

On considère l'équation différentielle $(E): y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$.

- i) Montrer que la fonction h , définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 2xe^{2x} + 1$ est solution de (E) .
- ii) On pose $y = z + h$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de $z' - 2z = 0$.
Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle $z' - 2z = 0$ et en déduire les solutions de (E) .
- iii) Démontrer qu'il existe une seule solution g de (E) s'annulant en 0.

B/

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1$.

1. Déterminer le sens de variations de g . Présenter son tableau de variation. En déduire le signe de g sur \mathbb{R} .

2. a) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $1 - g(x) \geq 0$

b) Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 [1 - g(x)] dx$

c) Interpréter graphiquement les résultats des questions a) et b)

Q3. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on considère les points $A(3,0,10)$; $B(0,0,15)$ et $C(0,20,0)$.

1.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

b. Montrer que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses en $E(9,0,0)$.

c. Justifier que les points A, B, et C ne sont pas alignés.

2. Soit H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC

a. Justifier que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (OEH).

En déduire que (EH) est la hauteur issue de E dans le triangle EBC.

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (OEH).

c. Vérifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :

$$20x + 9y + 12z - 180 = 0$$

d. Montrer que le système :
$$\begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 = 0 \end{cases}$$
 a une solution unique.

Que représente cette solution ?

e. Calculer la distance OH, en déduire que $EH=15$ et calculer l'aire du triangle EBC.

3. En exprimant de deux façons le volume du tétraèdre OEBC, et déterminer la distance du point O au plan (ABC).

Q4. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n , par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}; \quad v_0 = 4 \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}.$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2 .

2. Soit la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$

a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b. Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n) .

3. Etudier le sens de variation de (u_n) et (v_n) et démontrer que les deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$t_n = \frac{u_{n+2}v_n}{3}.$$

a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n) .

Q5. A/

i) Soit (C) la courbe d'équation paramétrique $\begin{cases} x = \cosh^2 t \\ y = \sinh t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2.$

a. Calculer la longueur de la courbe (C) .

La courbe subit une rotation d'angle 2π radians autour de l'axe des abscisses.

b. Montrer que l'aire S de la surface générée par la courbe est $S = 8\pi \int_0^2 \cosh^2 t \sinh t dt.$

En déduire la valeur approchée de S à 10^{-3} près.

ii) Calculer la valeur moyenne de $\ln x$ dans l'intervalle $1 \leq x \leq e.$

B/ Soit $I_n = \int_1^2 x(\ln x)^n dx$

Montrer que pour $n \geq 1, 2I_n + nI_{n-1} = 4(\ln 2)^n.$

Calculer $I_3.$

Q6. i) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z définies par

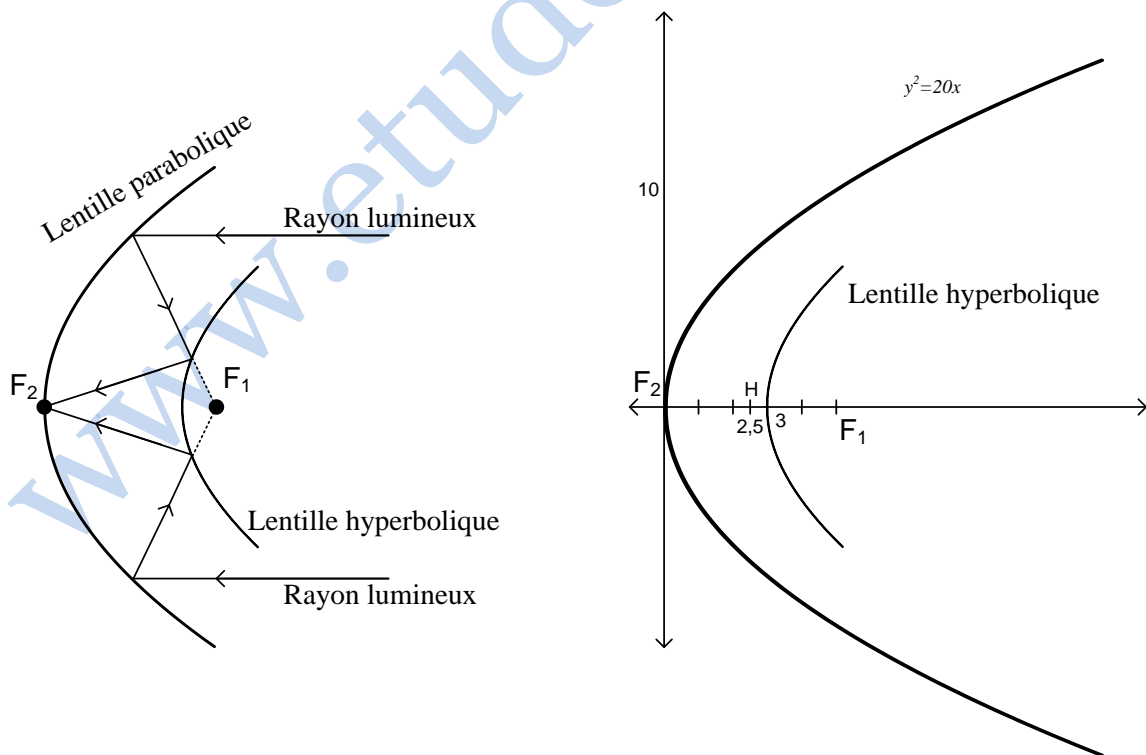
$|z + 1| + |z - 1| = 3.$ Représenter cet ensemble dans le plan complexe.

ii) Calculer pour $z \neq 1,$ la somme $\sum_{r=0}^n z^r, (n > 0).$

iii) Soit $z = \frac{1}{2}(\cos \theta + i \sin \theta),$ montrer que $\sum_{r=0}^{\infty} z^r = \frac{2(2 - \cos \theta) + 2i \sin \theta}{5 - 4 \cos \theta}.$

iv) La lentille parabolique de la figure ci-dessous est représentée par la portion (partie) de la parabole d'équation $y^2 = 20x$ avec $F_2 = (0,0).$

Le sommet de la branche droite de l'hyperbole est au point $(3,0).$



Déterminer

- Le foyer de la lentille parabolique
- Les foyers de la lentille hyperbolique
- Une équation cartésienne de l'hyperbole.

Q7. A/

Le vecteur position \vec{r} d'une particule P est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + 3n\frac{d\vec{r}}{dt} + 2n^2\vec{r} = 0$$

Où n est un entier relatif positif.

Exprimer \vec{r} , en fonction de t, tel que quand $t = 0$, $\vec{r} = 0$ et $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}$.

B/

Un projectile est lancé à partir du point origine du repère avec une vitesse initiale de 50m/s et faisait un angle de 60° avec l'axe des abscisses positives. On admettra que la seule force agissant sur l'objet est la force de la gravité

- Ecrire les équations paramétriques qui caractérisent son mouvement.
- Déterminer l'instant où l'objet va toucher le sol.
- Calculer la distance parcourue par le projectile.
- Trouver la hauteur maximale atteinte par l'objet et l'instant où cette hauteur est atteinte.
- Montrer que la position à l'instant t peut s'écrire comme la somme de deux vecteurs dont l'un ne dépend que de la vitesse initiale et l'autre de la gravité.