ENONCE DE MATHEMATIQUE ENSP YAOUNDE 2004

Niveau 1

ETUDE LIBRE
www.etudelibre.com

Durée 4heures

<u>Conseil</u> : Il est conseillé aux candidats de fournir des réponses correctes convenablement justifiées, plutôt que d'essayer à tout prix de traiter l'ensemble des exercices.

<u>Notation typographique</u>

On note :

IN= ensemble des entiers naturels

IR= ensembles des nombres réels

<u>Exercice 1</u> (10 points)

Calculer I= $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin(x) \times \ln(1-\sin(x))dx$

<u>Exercice 2</u> (14 points)

Soit n un entier naturel tel que $0 \leq$ n,

Pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$, on pose : Ip = $\int_0^n |p-x|dx$

1. Montrer que : Ip = I n-p
2. Calculer Ip en fonction de p et de n.
3. Montrer par récurrence sur n dans IN* que $\sum_{p=0}^{p=n} p^2 = \frac{1}{6}$ n (n-1) (2n+1)
4. En déduire $\sum_{p=0}^{p=n} I_p$

<u>Exercice 3</u> (12 points)

POLY est un tétraèdre régulier (toutes les arêtes sont de longueur a).

I est le milieu de [PL] et J celui de [YO]. G est isobarycentre de L, Y, et O, Ω est isobarycentre de L, Y, O et P.

1. Calculer PL.PO en fonction de a.

2. Montrer que (PL) et (YO) sont deux droites orthogonales.

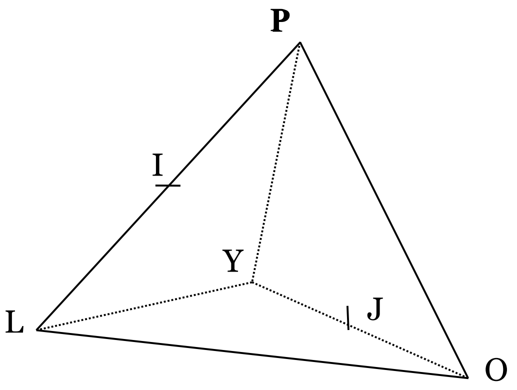
3. Montrer que (IJ) et (YO) sont deux droites orthogonales.

4. Justifier que (PG) est orthogonales au plan (LYO).

5. Montrer que $\overrightarrow{G\Omega} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GP}$.

6. Calculer PΩ.

7. Calculer une valeur approchée de l'angle PΩL



Exercice 4 (14 points)

1. Etudier la fonction f : x ⟶ $f(x) = \frac{1}{x^2}\ln(x)$ sur IR* (limites, dérivée, variations, branches infinies, graphique)
2. Représenter la fonction f dans un repère orthonormé d'unité 4 cm.
3. $f^{(n)}$ est la dérivée de $f^{(n-1)}$; $f^{(1)} = f'$;

Montrer que $f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+2}}(U_n + V_n \ln x)$ pour tout n de IN* où $U_1=1$ et $U_{n+1} = V_n - (n+2)U_n$ et $V_1 = -2$ et $V_{n+1} = -(n+2)V_n$

4. Calculer V_n en fonction de n.
5. Montrer que $U_n = (-1)^{n+1}!\left(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right)$

Exercice 5 (10 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct d'origine O, on donne les points A d'affixe a, B d'affixe b et C d'affixe c. r est la rotation de centre o et d'angle $\frac{\pi}{3}$ radians.

A'=r (A); B'=r (B); C'=r(C).

I est le milieu de [A'B], J est le milieu de [B'C] .K est le milieu de [C'A].

1. Calculer les affixes de I, J, et K.

2. Montrer qu'un argument de (IJ ; IK) est indépendant de a, b, et c.

3. Montrer qu'il existe une rotation R qui transforme I en J et J en K .Déterminer ses caractéristiques.

4. On suppose le cas particulier où le triangle IJK est réduit à un point :

a. Si a = 0 et b $\neq$0 avec arg (b) = ($\frac{\pi}{3}$) mod (2π), montrer que c est réel strictement positif.

b. Si a et b sont quelconques, montrer que A'C' = AB. En déduire la nature du triangle ABC. Calculer c en fonction de a et b.