CORRIGE DE MATHEMATIQUE ENSP YAOUNDE 2004

Niveau 1

ETUDE LIBRE
www.etudelibre.com

EXERCICE 1

Calcul de I = $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin(x)\ln(1-\sin(x))dx$

Posons u(x) = ln (1-sin(x)) $\Rightarrow$ u'(x) = $\frac{-\cos(x)}{1-\sin(x)}$ $\Rightarrow$ u'(x) = $\frac{\cos(x)}{-1+\sin(x)}$

v'(x) = sin (x) v(x) = - cos(x) v(x) = -cos'x)

I = $\int_{\pi/6}^{\pi/3} u(x)v'(x)$ = $u(x)v(x)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}$ - $\int_{\pi/6}^{\pi/3} u'(x)v(x)dx$

= $(-\cos(x)\ln(1-\sin x))_{\pi/6}^{\pi/3}$ + $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)-1}dx$

= - ½ ln (1- $\frac{\sqrt{3}}{2}$) + $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ln (1 – ½) + $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1-\sin^2(x)}{\sin(x)-1}dx$

=- ½ ln (1- $\frac{\sqrt{3}}{2}$) + $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ln (½) - $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{\sin(x)-1}dx$

=- ½ ln (1- $\frac{\sqrt{3}}{2}$) + $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ln (½) $-[x-\cos x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$$\boxed{I = -\tfrac{1}{2}\ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{6} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}}$$

EXERCICE 2

$I_p = \int_0^n |p-x|dx \quad 0 \le p \le n$

1) Montrons que $I_p = I_{n-p}$

$I_{n-p} = \int_0^n |n-p-x|dx$ posons u=n-x $\Rightarrow du = -dx$ $\Rightarrow dx = -du$

Pour x=0 u=n

Pour x=n u=0

Donc $I_{n-p} = \int_n^0 -|p-u|du$

$$\Rightarrow \boxed{I_{n-p} = \int_0^n |p-u|du}$$

2) Calculons I_p en fonction de n et p

$$I_p = \int_0^n |p-x|dx = \int_0^p (p-x)dx + \int_p^n (x-p)dx$$

$$= [px - \frac{x^2}{2}]_0^p + [\frac{x^2}{2} - px]_p^n$$

$$= p^2 - \frac{p^2}{2} + \frac{n^2}{2} - pn - \frac{p^2}{2} + p^2$$

$$I_p = p^2 + \frac{n^2}{2} - pn$$

3) Montrons par récurrence sur n dans IN* que $\sum_{p=0}^{p=n} p^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Pour n=1 $\sum_{p=0}^{p=1} p^2 = 1 = \frac{1}{6} \times 1 \times 2 \times 3$

Supposons que pour $n \geq 1$ $\sum_{p=0}^{p=n} p^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ et montrons que

$$\sum_{p=0}^{p=n+1} p^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

$$\sum_{p=0}^{n+1} p^2 = \sum_{p=0}^{p=n} p^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$

$$= (n+1)\left(\frac{1}{6}(2n^2+n) + n + 1\right)$$

$$= (n+1)(2n^2+7n+6)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

Donc $\forall n \in IN^* \quad \sum_{p=0}^{p=n+1} p^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$

4) Déduisons en $\sum_{p=0}^{p=n} I_p$

$$\sum_{p=0}^{p=n} I_p = \sum_{p=0}^{p=n} \left(\frac{n^2}{2} - pn + p^2\right)$$

$$= \sum_{p=0}^{p=n} \frac{n^2}{2} - n\sum_{p=0}^{p=n} p + \sum_{p=0}^{p=n} p^2$$

$$= \frac{(n+1)n^2}{2} - \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{p=0}^{p=n} I_p = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

EXERCICE 3

1) Calculons $\vec{PL} \cdot \vec{PO}$ en fonction de a.

$$\vec{PL} \cdot \vec{PO} = PL \times PO \times \cos(\vec{PL}, \vec{PO})$$

$$= a^2 \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\vec{PL} \cdot \vec{PO} = \frac{a^2}{2}$$

2) Montrons que (PL) et (YO) sont deux droites orthogonales

$$\vec{PL} . \vec{YO} = (\vec{PJ} + \vec{JL}) \cdot \vec{YO}$$

$$= \vec{PJ} \cdot \vec{YO} + \vec{JL} \cdot \vec{YO}$$

$$= 0 + 0$$

Donc (PL) et (YO) sont deux droites orthogonales

3) Montrons que (IJ) $\perp$ (YO).

$\vec{IJ}\,.\,\vec{YO} = (\vec{IP} + \vec{PJ}).\vec{YO}$ Or $\vec{IP} = -\frac{1}{2}\vec{PL}$

$$= (-\frac{1}{2}\vec{PL} + \vec{PJ}).\vec{YO}$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{PL}\,.\,\vec{YO} + \vec{PJ}\,.\,\vec{YO} = 0 \text{ d'où (IP)} \perp \text{(YO)}$$

4) Justifions que (PG) $\perp$ (YO)

$\vec{PG}\,.\,\vec{YO} = (\vec{PJ} + \vec{JG}).\vec{YO}$

$$= \vec{PJ}\,.\,\vec{YO} + \vec{JG}\,.\,\vec{YO} = 0 \Rightarrow (PG) \perp \text{(YO)} \qquad (1)$$

$\vec{PL}\,.\,\vec{PO} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \vec{PL}\,.\,(\vec{PL} + \vec{LO}) = \frac{a^2}{2}$

$$\Rightarrow \vec{PL}\,.\,\vec{LO} = \frac{a^2}{2} - PL^2$$

$$\Rightarrow (\vec{PG} + \vec{GL}).\vec{LO} = -\frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{PG}\,.\,\vec{LO} = -\frac{a^2}{2} - GL.LO.\cos(\frac{5\pi}{6})$$

$$\Rightarrow \vec{PG}\,.\,\vec{LO} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow \text{(PG)} \perp \text{(LO)} \qquad (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow (PG) \perp$ (LYO)

5) Montrons que $\vec{G\Omega} = \frac{1}{4}\vec{GP}$

$\Omega = bar\{(P,1),(O,1),(L,1),(Y,1)\} \Leftrightarrow \vec{\Omega P} + \vec{\Omega O} + \vec{\Omega L} + \vec{\Omega Y} = \vec{0}$

.

$$\Leftrightarrow 4\vec{G\Omega} + \vec{GP} + \underbrace{\vec{GO} + \vec{GL} + \vec{GY}}_{\vec{0}} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{G\Omega} = \frac{1}{4}\vec{GP}}$$

6) Calculons $P\Omega$

$\vec{P\Omega} = \vec{PG} + \vec{G\Omega} \Leftrightarrow P\Omega^2 = PG^2 + G\Omega^2 + 2PG.G\Omega.\cos(2\pi)$

$= 16G\Omega^2 + G\Omega^2 - 8G\Omega^2$

$= 9G\Omega^2$

$G\Omega^2 = P\Omega^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \quad G\Omega^2 = P\Omega^2 - a^2/5$

$\Leftrightarrow \quad P\Omega^2 = A\Omega^2 + a^2/3$

$\Leftrightarrow \quad P\Omega^2 = P\Omega^2/9 + a^2/3$

On a donc $P\Omega = \frac{\sqrt{6}}{4}a$

7) Calculons une valeur approchée de l'angle $P\Omega L$

Considérons le triangle $P\Omega L$; on a :

$PL^2 = P\Omega^2 + \Omega L^2 - 2P\Omega\Omega L\cos P\Omega L$

Donc $\cos P\Omega L = 1 - \frac{PL^2}{2P\Omega^2} = -\frac{1}{3}$

$P\Omega L = 109°$

Exercice III

1) $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2} \quad x \in IR^*$

Etude de f

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

f est continue et dérivable sur IR*+ et $\forall x \in IR^{*}+$

$f'(x) = \dfrac{1-2\ln x}{x^3}$ $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{e}$

Pour $x < \sqrt{e}$ $\quad f'(x) \geq 0$ $\quad \Rightarrow$ f est croissante sur $\left]0, \sqrt{e}\right[$

Pour $x > \sqrt{e}$ $\quad f'(x) \leq 0$ $\quad \Rightarrow$ f est décroissante sur $\left]\sqrt{e}, +\infty\right[$

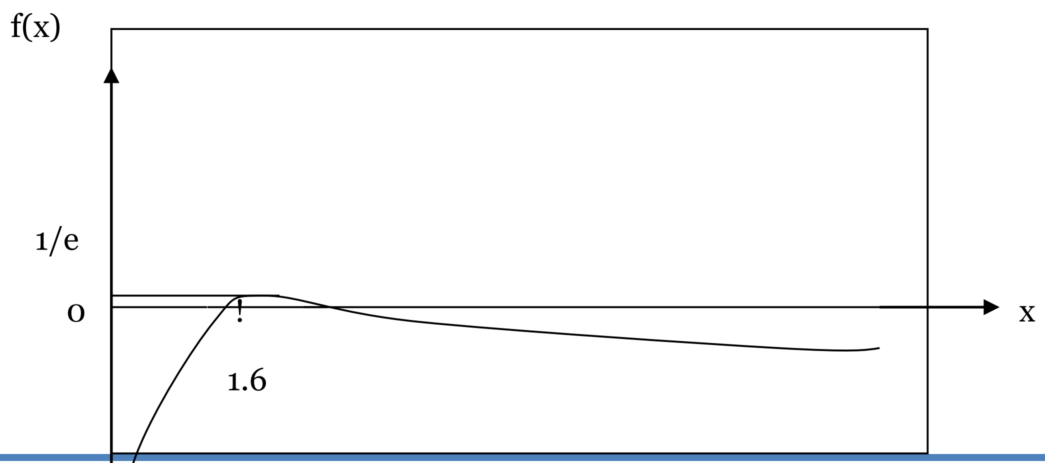
Tableau de variations

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)		$-\infty$ ↗	$\frac{1}{e}$	↘ 0	

Branches infinies

$\lim\limits_{x\to+\infty} = 0 \Rightarrow C_f$ admet une asymptote d'équation y=0 au voisinage de +∞.

2)



3*) Montrons que $\forall n \in IN^*$ $f^{(n)}(x)=\dfrac{u_n+v_n\ln x}{x^{n+2}}$ où $u_1=1$ et $u_{n+1}=v_n-(n+2)u_n$

$v_1=-2$ et $v_{n+1}=-(n+2)u_n$

Raisonnons par récurrence :

Pour n=1 on a $f^1(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}=\dfrac{1-2\ln x}{x^{1+2}}=\dfrac{u_1+v_1\ln x}{x^{1+2}}$

Supposons que $f^{(n)}(x)=\dfrac{u_n+v_n\ln x}{x^{n+2}}$ pour $n\geq 1$ et montrons que $f^{(n+1)}(x)=$ $\dfrac{u_{n+1}+v_{n+1}\ln x}{x^{n=3}}$

$$f^{(n)}(x)=\frac{u_n+v_n\ln x}{x^{n+2}} \quad = f^{(n+1)}(x)=\frac{x^{n+1}v_n-(u_n+v_n\ln x)(x+2)x^{n+1}}{x^{2n+4}}$$

$$=\frac{(n+2)u_n+v_n-(n+2)v_n\ln x}{x^{n+3}}$$

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{u_{n+1}+v_{n+1}\ln x}{x^{n=3}}$$

Donc $\forall n \in IN^*$ $f^{(n)}(x)=\dfrac{u_n + v_n \ln x}{x^{n+2}}$

4) Calculons v_n en fonction de n.

on a $v_2=-3v_1$

$v_3=-4v_2$

. produit membre à membre $\Leftrightarrow v_n = \dfrac{(-1)^{n-1} 2\times 3\times 4\times ...\times (n+1)\times v_1}{2}$

.

$v_n=-(n+1)v_{n-1}$ $\boxed{\Leftrightarrow v_n = (-1)^n (n+1)!}$

5) Montrons que $u_n = (-1)^{n+1}(n+1)!\left(\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n+1}\right)$

Par récurrence:

Pour n=1 on a (-1)² (2!) (1\2)=1 et u_n =1

Pour $n \geq 1$ supposons que $u_n = (-1)^{n+1}(n+1)!\left(\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n+1}\right)$

et montrons que $u_{n+1} = (-1)^{n+2}(n+2)!\left(\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n+2}\right)$

On a $u_{n+1} = v_n - (n+2)\, u_n$

$$= (-1)^n (n+1)! - (n+2)\ (-1)^{n+1}(n+1)!\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= (-1)^n (n+1)! + (-1)^{n+2}(n+2)!\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= (-1)^{n+2}(n+2)!\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)$$

Donc $\forall n \in IN^*$ $\quad u_n = (-1)^{n+1}(n+1)!\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)$

Exercice V.

1*)- $z_I = \dfrac{z_{A4} + z_B}{2} = \dfrac{(1+i\sqrt{3})a + 2b}{4}$

$z_J = \dfrac{z_{B4} + z_C}{2} = \dfrac{(1+i\sqrt{3})b + 2c}{4}$

$z_K = \dfrac{z_{C4} + z_A}{2} = \dfrac{(1+i\sqrt{3})c + 2a}{4}$

d'où

$$\boxed{z_I=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)a+2b}{4}\ ;\quad z_J=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)b+2c}{4}\ ;\quad z_K=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)c+2a}{4}}$$

2*) <u>Montrons qu'un argument de (IJ, IK) est indépendant de a, b et c.</u>

On a:

Arg $\left(\left(\vec{IJ},\vec{IK}\right)\right)$ = arg$\left(\dfrac{ZL-ZI}{ZJ-ZK}\right)$

$$=\arg\left[\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)c+2a-\left(1+i\sqrt{3}\right)a-2b}{\left(1+i\sqrt{3}\right)b+2c-\left(1+i\sqrt{3}\right)a-2b}\right]$$

$$=\arg\left[\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)}{1+i\sqrt{3}}\times\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)(c-a)+2(a-b)}{\left(1+i\sqrt{3}\right)(b-a)+2(c-b)}\right]$$

$$=\arg\left[\frac{-2\left(1+i\sqrt{3}\right)(c-a)+2\left(1+i\sqrt{3}\right)(a-b)}{-2\left(1+i\sqrt{3}\right)(b-a)+2\left(1+i\sqrt{3}\right)(c-b)}\right]$$

$$=\arg\left[\frac{\left(\left(1-i\sqrt{3}\right)a-2b+\left(1+i\sqrt{3}\right)c\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(2\left(1-i\sqrt{3}\right)a-4b+2\left(1+i\sqrt{3}\right)c\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}\right]$$

$$=\arg\left(\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$$

3) Montrons qu'il existe une rotation qui transforme I en J et J en K et déterminons ses caractéristiques.

D'après 1) $z_k - z_i = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_j - z_i)$

$\Leftrightarrow$ IJK est un triangle équilatéral

$\Leftrightarrow$ IJ=IK et mes $(\vec{IJ}, \vec{IK})$=ei $\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \exists$ une rotation qui transforme I en J et J en K.

Son angle est $\frac{2\pi}{3}$ et son centre est w qui vérifie

Z_j-w= ei($\frac{2\pi}{3}$)(z_i-w) $\Leftrightarrow$ w(ei($\frac{2\pi}{3}$)-1)= ei($\frac{2\pi}{3}$)-z_j

$$\Leftrightarrow w\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{(1+i\sqrt{3})a+2b}{4}\right)-\frac{(1+i\sqrt{3})b+2c}{4}$$

$$=\frac{(-1+i\sqrt{3})(a+2b+ia\sqrt{3})}{8}-\frac{(2a+b)+ib\sqrt{3}}{4}$$

$$=\frac{-(2a+b)+ib\sqrt{3}-b-2a-ib\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{w=\frac{-2a-b}{2}}$$

4) a) Montrons que si a=0 et b$\neq$0 avec $\arg(b)=\frac{\pi}{3} \mod(2\pi)$ $c \in IR^+$

$z_i = z_k \Leftrightarrow \frac{(1+i\sqrt{3})a+2b}{4}=\frac{(1+i\sqrt{3})c+2a}{4}$ or a=0

$$\Leftrightarrow 2b = \left(1 + i\sqrt{3}\right)c \Leftrightarrow \frac{2b\left(1 - i\sqrt{3}\right)}{4} = c$$

$$\Leftrightarrow \quad c = |b|\, e^{i\frac{\pi}{3}} . e^{-i\frac{\pi}{3}} = |b|$$

donc $c \in IR_+^*$

b) Montrons que si a et b sont quelconques $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB}$.

$z_I = z_K \Leftrightarrow z_{A'} + z_B = z_{C'} + z_A$

$\Leftrightarrow z_{C'} - z_{A'} = z_B - z_A$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB}$.

Déduisons-en la nature du triangle ABC.

$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB}$. or A' = r(A) et C' = r(C)

$\Leftrightarrow$ mes $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'C'}) = \frac{\pi}{3} rad$ et AC = A'C'.

$\Leftrightarrow$ mes $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3} rad$ et AC = AB.

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{ABC est un triangle}}$

Calculons c en fonction de a et b.

ABC est équilatéral $\Leftrightarrow \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow a - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - c)$

$\Leftrightarrow (a - b)\, e^{-i\frac{\pi}{3}} = a - c$

$\Leftrightarrow a\,(e^{-i\frac{\pi}{3}} - 1) - b\, e^{-i\frac{\pi}{3}} = -c$

$\Leftrightarrow a\left(\frac{1}{2} - 1 - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - b\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -c$

$$\Leftrightarrow \; c = a\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+b\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\boxed{c = ae^{i\frac{\pi}{3}}+be^{-i\frac{\pi}{3}}}$$